

DINÂMICA DOS FLUIDOS PARA ENGENHEIROS EM FORMAÇÃO



**LÔIDE ANGELINI SOBRINHA
AUGUSTO SALOMÃO BORNSCHLEGELL
ALEXANDRE GIMENEZ MONGE
JANAINA NOBRE DE OLIVEIRA
JORGE LUIS ALVES ALENCAR
JOSÉ MATEUS OVIEDO DO NASCIMENTO
JOSÉ EMANUEL DA SILVA MONTIEL
LUCAS YASUTOSHI NEGRETE BOMURA**

DINÂMICA DOS FLUIDOS PARA ENGENHEIROS EM FORMAÇÃO



LÔIDE ANGELINI SOBRINHA
AUGUSTO SALOMÃO BORNSCHLEGELL
ALEXANDRE GIMENEZ MONGE
JANAINA NOBRE DE OLIVEIRA
JORGE LUIS ALVES ALENCAR
JOSÉ MATEUS OVIEDO DO NASCIMENTO
JOSÉ EMANUEL DA SILVA MONTIEL
LUCAS YASUTOSHI NEGRETE BOMURA

UF
GD editora
2022

Equipe EdUFGD**Coordenação editorial:**

Giovani Ferreira Bezerra

Divisão de administração e finanças:

Givaldo Ramos da Silva Filho

Rafael Todescato Cavaleiro

Divisão de editoração:

Brainer de Castro Lacerda

Cynara Almeida Amaral Piruk

Maurício Lavarda do Nascimento

Rosalina Dantas da Silva

Wanessa Gonçalves Silva

e-mail: editora@ufgd.edu.br

A presente obra foi aprovada de acordo
com o Edital n. 10/2020/EDUFGD.

Editora filiada à:

**Gestão 2019-2021****Universidade Federal da Grande Dourados****Reitora pro tempore:**

Mirlene Ferreira Macedo Damázio

Vice-Reitor pro tempore:

Luciano Oliveira Geisenhoff

Conselho editorial:

Giovani Ferreira Bezerra

Luciano Oliveira Geisenhoff

Maria Aparecida Farias de Souza Nogueira

Eudes Fernando Leite

Bruno Boti Bernardi

Eliane Souza de Carvalho

Gustavo de Souza Preussler

Revisão:

Cynara Almeida Amaral Piruk e

Wanessa Gonçalves Silva

Projeto gráfico, diagramação e capa:

Brainer de Castro Lacerda

Ilustração da capa:

José Mateus Oviedo do Nascimento

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).620.106
A582d

Angelini Sobrinha, Lôide.

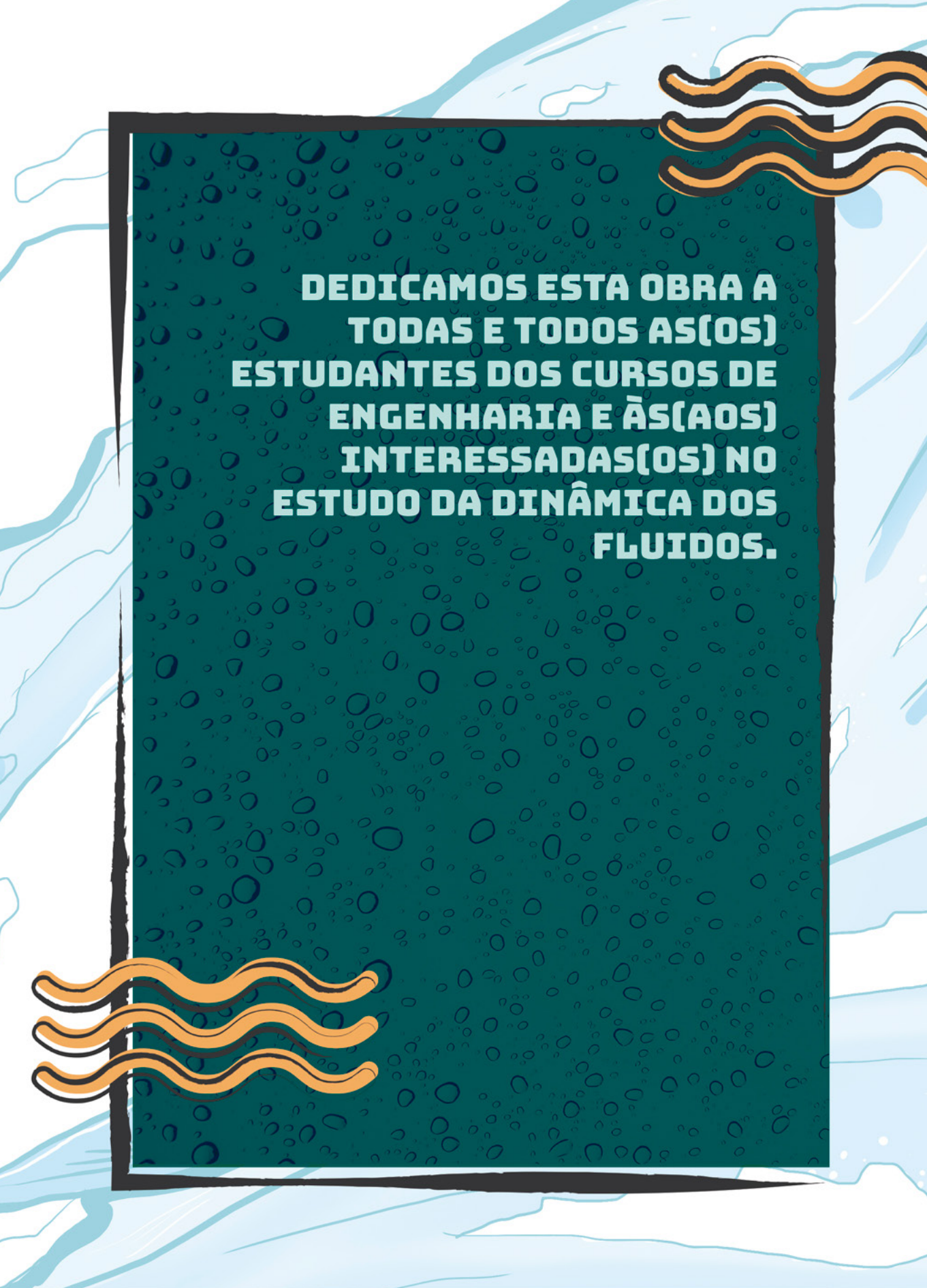
Dinâmica dos fluidos para engenheiros em formação [recurso eletrônico]. /
Lôide Angelini Sobrinha... [et al.]. – Dourados, MS: UFGD, 2022.

178p. : il.

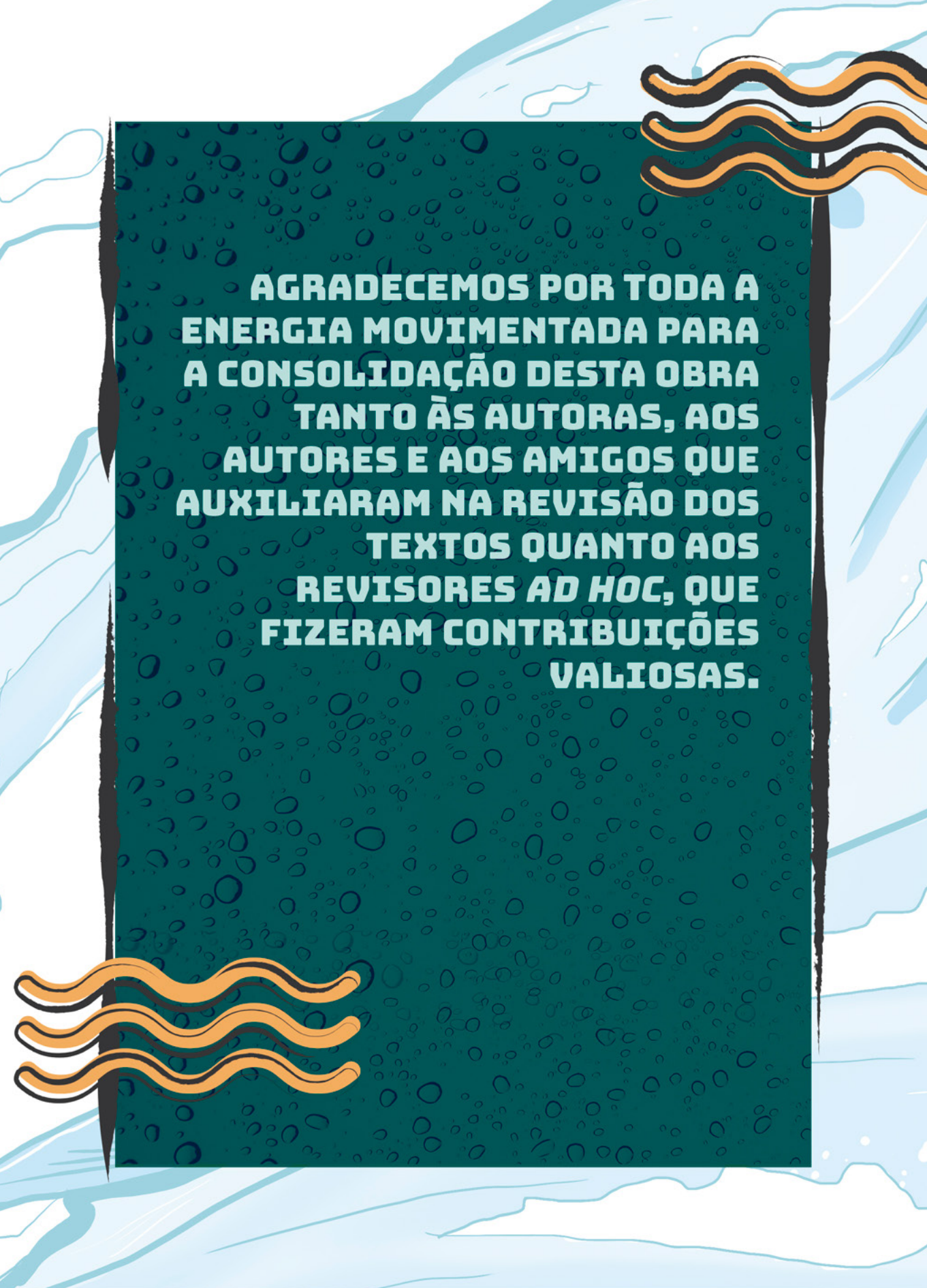
Disponível em: <https://omp.ufgd.edu.br/omp/index.php/livrosabertos/catalog>

ISBN: 978-85-8147-196-9 (e-book)

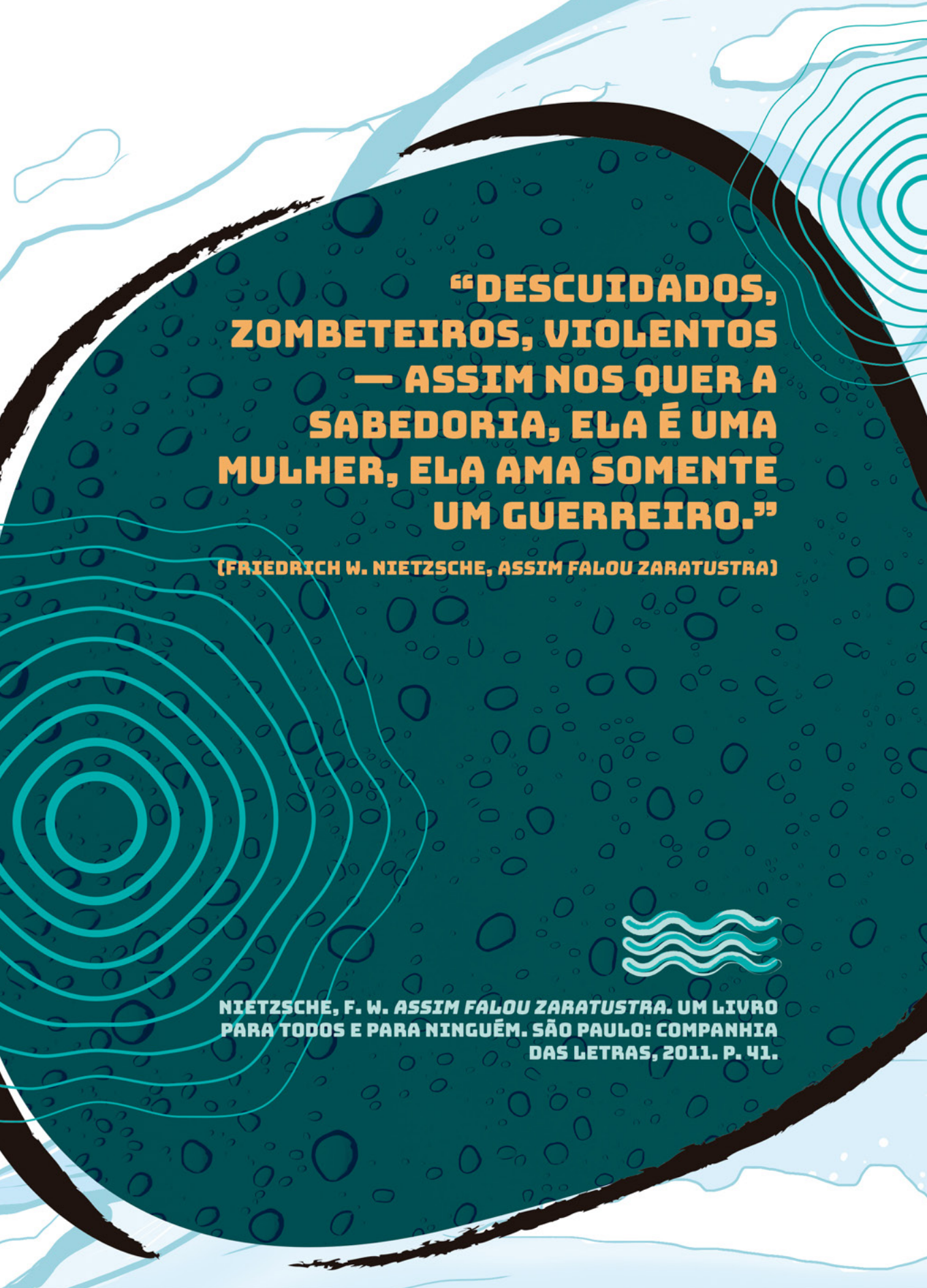
1. Cinemática. 2. Leis de conservação. 3. Análise dimensional. 4. Engenharia.
I. Bornschlegell, Augusto Salomão. II. Monge, Alexandre Gimenez. III. Oliveira,
Janaina Nobre de. IV. Alencar, Jorge Luiz Alves. V. Nascimento, José Mateus
Oviedo do. VI. Montiel, José Emanuel da Silva. VII. Bomura, Lucas Yasutoshi
Negrete.



**DEDICAMOS ESTA OBRA A
TODAS E TODOS AS(OS)
ESTUDANTES DOS CURSOS DE
ENGENHARIA E ÀS(AOS)
INTERESSADAS(OS) NO
ESTUDO DA DINÂMICA DOS
FLUIDOS.**



**AGRADECEMOS POR TODA A
ENERGIA MOVIMENTADA PARA
A CONSOLIDAÇÃO DESTA OBRA
TANTO ÀS AUTORAS, AOS
AUTORES E AOS AMIGOS QUE
AUXILIARAM NA REVISÃO DOS
TEXTOS QUANTO AOS
REVISORES *AD HOC*, QUE
FIZERAM CONTRIBUIÇÕES
VALIOSAS.**



**“DESCUIDADOS,
ZOMBETEIROS, VIOLENTOS
— ASSIM NOS QUER A
SABEDORIA, ELA É UMA
MULHER, ELA AMA SOMENTE
UM GUERREIRO.”**

(FRIEDRICH W. NIETZSCHE, ASSIM FALOU ZARATUSTRA)



**NIETZSCHE, F. W. ASSIM FALOU ZARATUSTRA. UM LIVRO
PARA TODOS E PARA NINGUÉM. SÃO PAULO: COMPANHIA
DAS LETRAS, 2011. P. 41.**

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO P. 12

INTRODUÇÃO P. 13

CAPÍTULO 1 – REVISÃO DE CONCEITOS IMPORTANTES P. 15

1.1 Grandeza escalar e grandeza vetorial p. 15

1.1.1 Notação vetorial p. 17

1.1.2 Vetor posição p. 19

1.2 Relembrando o conceito de gradiente e de produto escalar p. 20

1.3 Derivada material p. 23

1.4 Características e propriedades dos fluidos p. 25

1.5 Viscosidade p. 29

1.6 Escoamento incompressível e escoamento compressível p. 31

1.7 Fluido contínuo [sob o ponto de vista macroscópico] p. 33

1.8 Escoamento estacionário p. 34

1.9 Variáveis de campo p. 34

1.9.1 Campo de pressão p. 35

1.9.2 Campo de velocidade p. 36

1.9.3 Campo de aceleração p. 37

1.10 Algumas observações sobre a velocidade p. 39

1.11 Momento linear p. 43

1.12 Energia cinética p. 45

1.13	Análise de sistemas [fechados]	p. 45
1.14	Volume de controle [sistema aberto]	p. 47
1.15	Propriedades extensivas e intensivas	p. 48
1.16	Leis de conservação	p. 49
1.16.1	Conservação de massa	p. 50
1.16.2	Primeira lei da termodinâmica	p. 51
1.17	Montante e jusante	p. 52
	Referências	p. 55

CAPÍTULO 2 – CINEMÁTICA DOS FLUIDOS P. 57

2.1	Descrição lagrangiana e euleriana	p. 58
2.2	Fundamentos de visualização do escoamento	p. 61
2.3	Volume de controle e sistema	p. 66
2.4	Teorema de Transporte de Reynolds [TTR]	p. 66
	Referências	p. 77

CAPÍTULO 3 – CONSERVAÇÃO DA MASSA P. 79

3.1	Conservação da massa: análise com volume de controle finito	p. 79
3.2	Vazão em massa	p. 81
3.3	Vazão em volume	p. 86
3.4	Princípio de conservação de massa	p. 87



3.5 Equação da continuidade: simplificada	p. 92
Referências	p. 97

CAPÍTULO 4 – CONSERVAÇÃO DA ENERGIA P. 99

4.1 A energia mecânica	p. 100
4.2 Equação geral da energia	p. 103
4.2.1 Transferência de energia por calor	p. 107
4.2.2 Transferência de energia por trabalho	p. 107
4.3 Equação de Bernoulli	p. 110
4.3.1 Equação de Bernoulli com presença de máquinas .	p. 117
4.4 Potência e rendimento de máquinas	p. 118
4.5 Perda de energia mecânica no escoamento do fluido	p. 121
Referências	p. 124

CAPÍTULO 5 – CONSERVAÇÃO DO MOMENTO P. 125

5.1 O momento e a Segunda Lei de Newton	p. 125
5.2 Forças que atuam sobre um volume de controle	p. 127
5.3 Quantidade de movimento linear para um volume de controle	p. 138
5.4 Fator de correção do fluxo de momento, β	p. 146
Referências	p. 151

CAPÍTULO 6 – ANÁLISE DIMENSIONAL P. 153

- 6.1 Homogeneidade dimensional p. 153
- 6.2 Grandezas adimensionais p. 158
- 6.3 As principais grandezas da Mecânica dos Fluidos p. 159
- 6.4 Método das variáveis repetidas: teorema Pi de Buckingham p. 163
- 6.5 Considerações sobre a análise dimensional e o teorema dos Π 's p. 168
- Referências p. 170

CAPÍTULO 7 – CONVERSANDO COM OS AUTORES P. 171

SOBRE OS AUTORES P. 177

APRESENTAÇÃO

Este livro é resultado de um Projeto de Ensino de Graduação (PEG), aprovado pela Resolução CEPEC/UFGD n. 133, de 29 de agosto de 2019, desenvolvido por estudantes do curso de Engenharia Civil e professores da Faculdade de Engenharia (FAEN) da Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD). Os temas aqui desenvolvidos foram motivados pelas dificuldades que os estudantes encontram ao estudar os conteúdos de Dinâmica dos Fluidos nos cursos de engenharia da FAEN, de forma que se buscou uma linguagem amigável para a apresentação do assunto aos estudantes e aos interessados.

Trata-se da primeira edição da obra e esperamos que, com o uso do material, os(as) professores(as), os(as) estudantes e os(as) interessados(as) possam contribuir para o aprimoramento do conteúdo apresentado e, possivelmente, para a publicação de uma nova edição.

Lôide Angelini Sobrinha

INTRODUÇÃO

A Mecânica dos Fluidos é uma subcategoria da Mecânica, cujo foco é o estudo do comportamento dos fluidos em repouso e em movimento e das interações entre fluidos e sólidos. Nessa classificação, o estudo do comportamento do fluido em repouso é intitulado Estática dos Fluidos, e em movimento é intitulado Dinâmica dos Fluidos. A Mecânica dos Fluidos, popularmente conhecida pelos estudantes como MecFlu, é definida também como a ciência que estuda o comportamento físico dos fluidos e as leis que regem seu comportamento.

O estudo do movimento dos fluidos proposto nesta obra também é conhecido como Hidrodinâmica, a qual proporciona os fundamentos para o desenvolvimento das teorias estudadas em hidráulica dos condutos forçados e dos condutos livres. Para entender o que especificamente o estudante de engenharia experimentará ao estudar o movimento dos fluidos, iniciamos apresentando uma conceituação mais simples de fluido, ou seja, qualquer substância em estado líquido ou gasoso (água, óleo, gasolina e gases em geral).

Outra abordagem também permite definir o fluido a partir da análise da estrutura molecular de um material sólido (aço e concreto, por exemplo), que possui moléculas pouco espaçadas e sujeitas a forças intermoleculares intensas e coesivas. Nos materiais líquidos (fluidos), o espaçamento entre as moléculas é maior e as forças intermoleculares são fracas, se comparadas àquelas dos sólidos, e, por esse motivo, as moléculas de fluido apresentam maior liberdade de movimento, conferindo ao fluido a característica de ser deformável. Os gases (ar e oxigênio, por exemplo) apresentam espaços intermoleculares ainda maiores e as forças intermoleculares são desprezíveis. Dessa forma, conseqüentemente a liberdade de movimento e a deformação dos gases são maiores do que as dos fluidos.

O fluido água, por exemplo, ao escoar através da tubulação de um reservatório até uma torneira, é um caso de estudo, pois cabe ao estudante de engenharia entender as relações entre o movimento das partículas de água dentro da tubulação e as paredes sólidas da

tubulação, sendo que, o atrito entre a parede da tubulação e o fluido causam uma perda de energia que necessita ser contabilizada em um projeto hidráulico-sanitário.

Em alguns cursos de Engenharia, o estudo da MecFlu é a base para os estudos da Hidráulica e, por isso, em MecFlu, é solicitado ao(à) estudante que ele(a) entenda as relações de movimento dos fluidos e as leis que regem seu comportamento para que, a partir desse entendimento, possa prosseguir no estudo da Hidráulica, no caso do estudante de Engenharia Civil. Ao estudar Hidráulica, o estudante desenvolve habilidades para projetar sistemas hidráulicos-sanitários, sistemas de tratamento de água para o consumo humano, sistemas de tratamento de esgoto sanitário e sistemas de drenagem das águas pluviais.

Muitos estudantes têm dificuldades em visualizar a aplicação da MecFlu a partir das teorias e exemplos de aplicação apresentados em diversas obras sobre o assunto. Portanto, esta obra objetiva apresentar os conteúdos com uma linguagem acessível aos leitores e, sempre que possível, justificar a necessidade do aprendizado de determinados temas, pois, assim, acreditamos auxiliar no processo de ensino-aprendizagem.

Com uma linguagem amigável, o livro *Dinâmica dos fluidos para engenheiros em formação* aborda, no primeiro capítulo, uma revisão de termos e conceitos da Mecânica dos Fluidos. Na sequência, no segundo capítulo, são apresentados dois temas referentes à Cinemática dos Fluidos: as descrições Lagrangiana e Euleriana e o Teorema de Transporte de Reynolds. Do terceiro ao quinto capítulos são apresentados os conceitos relacionados à conservação da massa, da energia e do momento. No sexto capítulo, são apresentados os conceitos relacionados à análise dimensional. Por fim, no último capítulo do livro, são apresentados os relatos dos autores sobre o processo de construção da obra e as expectativas quanto ao uso do material.

Objetivando auxiliar o entendimento dos conceitos apresentados nas diversas obras sobre Mecânica dos Fluidos, este livro tem um caráter teórico e não propõe exercícios de aplicação prática.

REVISÃO DE CONCEITOS IMPORTANTES

Neste capítulo, são apresentados alguns conceitos necessários para o entendimento das teorias apresentadas nos capítulos seguintes. Ao ler a primeira seção deste capítulo, o leitor pode perguntar-se por que é preciso saber o conceito de grandeza vetorial para entender o movimento de um fluido. Pois bem, uma das características do movimento do fluido é a velocidade, a qual é uma grandeza vetorial, ou seja, ao estudar a velocidade enquanto grandeza vetorial, denota-se que, além do valor numérico, a velocidade é uma grandeza física que tem direção e sentido. Para o estudo do movimento, a definição da grandeza vetorial é essencial, pois as partículas de fluido em movimento podem ter direção e sentido diferentes.

São apresentados também os conceitos fundamentais para o estudo da Mecânica dos Fluidos, tais como: volume de controle, propriedade dos fluidos, condições e tipos de escoamento.

1.1 Grandeza escalar e grandeza vetorial

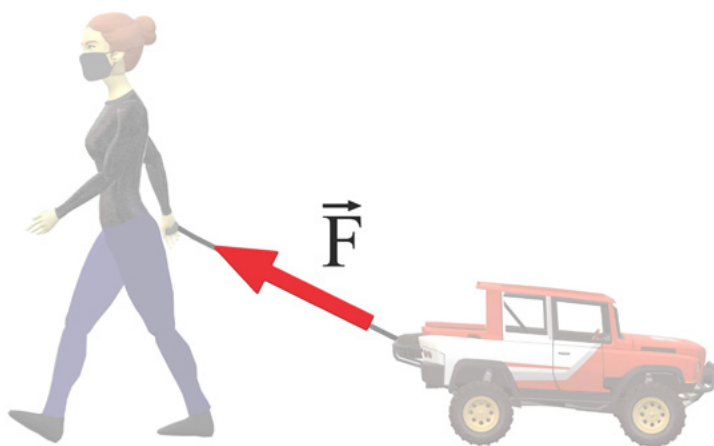
Uma grandeza física é denominada escalar quando requer apenas um atributo e uma unidade de medida (MARQUES, [202-]). Para exemplificar, consideremos um determinado reservatório de água, conhecido popularmente como caixa d'água, com volume de 1000 litros. Nesse caso, o volume é o atributo, pois está totalmente definido por seu valor numérico (1000) e por sua unidade de medida (litros), não

havendo necessidade de mais informações, como direção e sentido. Além do volume, são exemplos de grandezas escalares a pressão, a energia, a temperatura e o tempo.

Uma grandeza física é denominada vetorial quando, além de necessitar de um valor numérico, também necessita de uma direção e de um sentido para ser determinada, ou seja, necessita de um conjunto de três informações ou atributos para sua inteira caracterização (MARQUES, [202-]). De acordo com Salmeron (2003) “uma grandeza vetorial se caracteriza por quatro elementos: significado físico, valor numérico (módulo), direção e sentido”.

As grandezas vetoriais são representadas por entes matemáticos denominados vetores. São exemplos de grandezas vetoriais: a força, a velocidade, a aceleração, o momento linear, o momento angular e o torque. Um exemplo de grandeza vetorial é apresentado na Figura 1.1. Para entender o conceito de força, devemos conhecer seu módulo, sua direção e seu sentido.

Figura 1.1 – Representação da força como grandeza vetorial (seta vermelha).



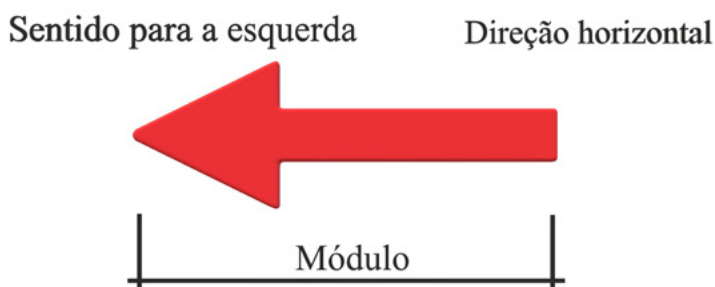
Fonte: Elaborada pelos autores.

Além da grandeza força, a velocidade também é um exemplo. Além do valor numérico, ela possui unidade de medida que relaciona as unidades de comprimento e de tempo no sistema internacional de unidades de medidas (SI), metros por segundo (m/s). A aceleração gravitacional, além do valor usual de 9,81, possui unidade de medida m/s^2 .

1.1.1 Notação vetorial

Segundo a definição de Halliday, Resnick e Walker (2016), vetores são representações da intensidade (também denominada de módulo), da direção e do sentido de determinada grandeza vetorial. São constituídos de reta (representando o suporte para a direção) e de seta (representando o sentido). O comprimento do vetor caracteriza seu valor ou, em termos técnicos, seu módulo (HIBBELER, 2010). Na Figura 1.2, são apresentadas as características do vetor.

Figura 1.2 – Representação de um vetor.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Um vetor velocidade $\vec{V}$, por exemplo, pode ser representado da seguinte maneira:

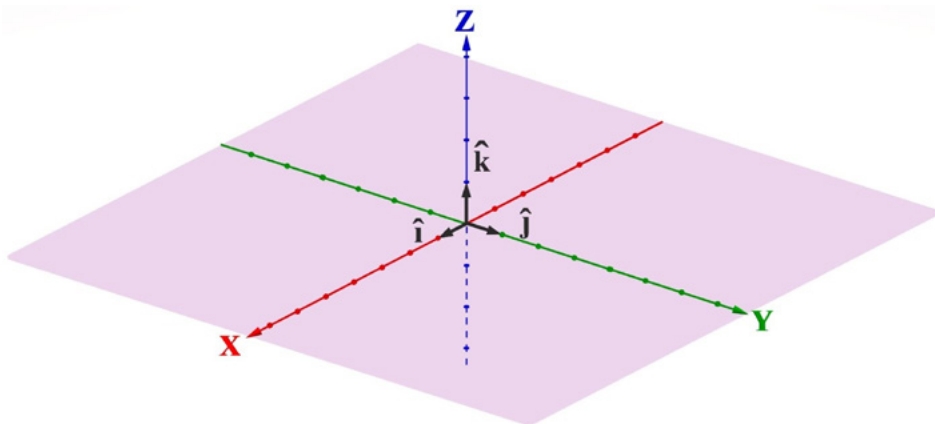
$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

(1.1)

Na Equação 1.1, o vetor velocidade $\vec{V}$ é escrito como a soma vetorial das velocidades $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Note que u , v e w representam as magnitudes das componentes nas direções x , y e z do espaço cartesiano, respectivamente.

Os versores $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ são os vetores unitários $\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$ e $\hat{k} = (0, 0, 1)$, atuantes nas direções x , y e z , respectivamente, conforme representado na Figura 1.3.

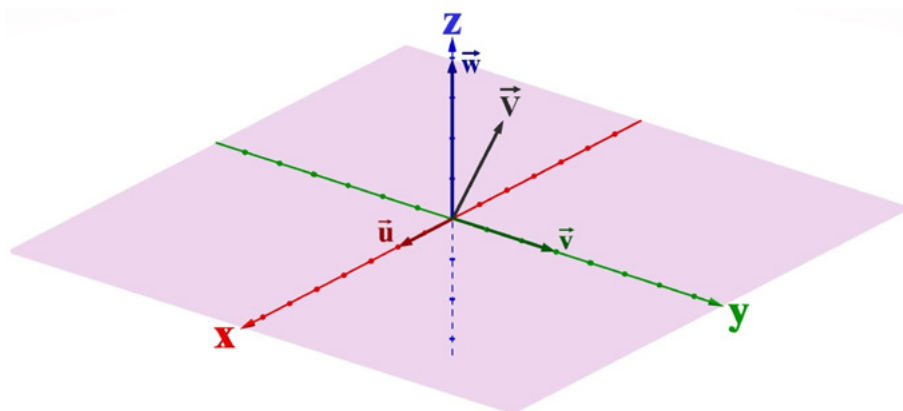
Figura 1.3 – Representação dos vetores unitários $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Por exemplo, um vetor velocidade tridimensional ou uma velocidade que atua em três diferentes direções é escrito como $\vec{V} = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$ m/s. Note que os valores 2, 3 e 4 são exemplos das magnitudes das componentes nas direções x , y e z , respectivamente. Graficamente, em termos de vetor unitário, o vetor velocidade é representado pela Figura 1.4.

Figura 1.4 – Representação do vetor $\vec{V} = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$ e de seus componentes $\vec{u} = (2\hat{i})$, $\vec{v} = (3\hat{j})$ e $\vec{w} = (4\hat{k})$.



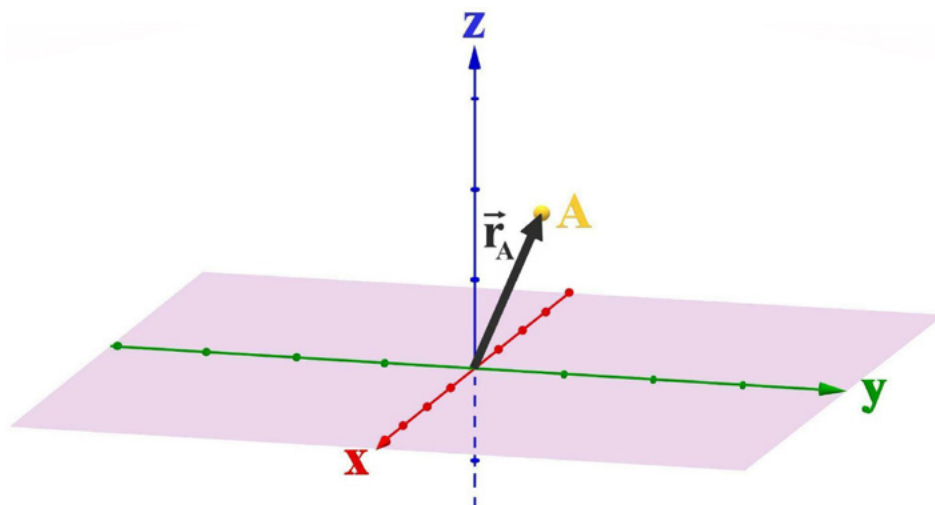
Fonte: Elaborada pelos autores.

1.1.2 Vetor posição

A posição de um objeto pode ser representada utilizando vetores, os chamados vetores posição. No sistema cartesiano de coordenadas (x, y, z) , o vetor posição $\vec{r}$ parte da origem $(0, 0, 0)$ (referencial) e vai até a posição do objeto considerado de acordo com as coordenadas (x, y, z) . Essa abordagem é adotada por Hibbeler (2010) e comumente utilizada por vários autores.

Observe, na Figura 1.5, o ponto A de coordenadas $(2, 2, 4)$, vetor destacado em preto na imagem, é o vetor posição denotado por $\vec{r}_A$.

Figura 1.5 – Posição do ponto A representada por um vetor.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Para obter o módulo do vetor, ou o seu tamanho, elevamos cada magnitude de cada componente do vetor ao quadrado, e somamos os valores obtidos. Em seguida, aplicamos a raiz quadrada ao resultado da soma. No exemplo referente à Figura 1.4, temos que:

$$V = \sqrt{(2^2 + 3^2 + 4^2)} = \sqrt{(4 + 9 + 16)} = \sqrt{29} = 5,39 \text{ m/s}$$

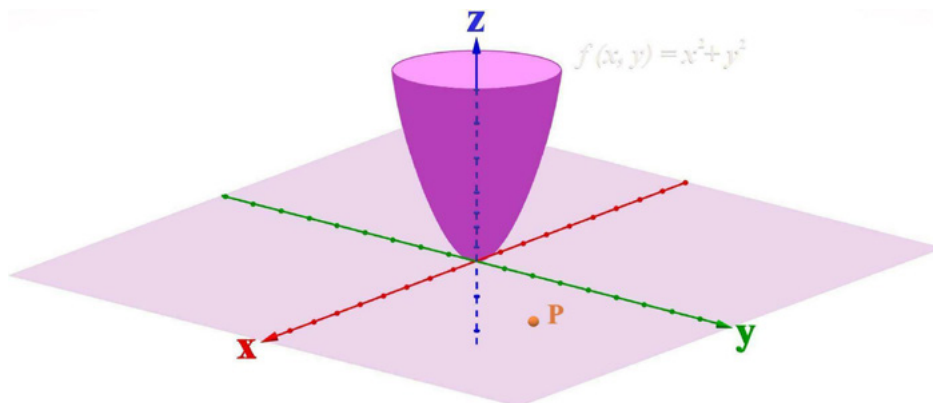
1.2 Relembrando o conceito de gradiente e de produto escalar

No cálculo, o gradiente de uma função é o vetor que aponta para a direção e o sentido de máximo crescimento da função no ponto avaliado (STEWART, 2013). Ele é o vetor onde cada coordenada é uma derivada parcial da função, em 3 dimensões temos que o gradiente de uma função no ponto avaliado $\vec{f}$ é:

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right) \quad (1.2)$$

Por exemplo, temos a função $f(x, y) = x^2 + y^2$ e um ponto P (3, 4) no plano cartesiano. Ao aplicar os conceitos de vetor gradiente, derivando parcialmente a função em relação a x para obter a coordenada x do vetor gradiente e depois fazendo o mesmo em relação a y , obtemos: $\vec{\nabla} f(x, y) = (2x\hat{i} + 2y\hat{j})$, conforme Figura 1.6.

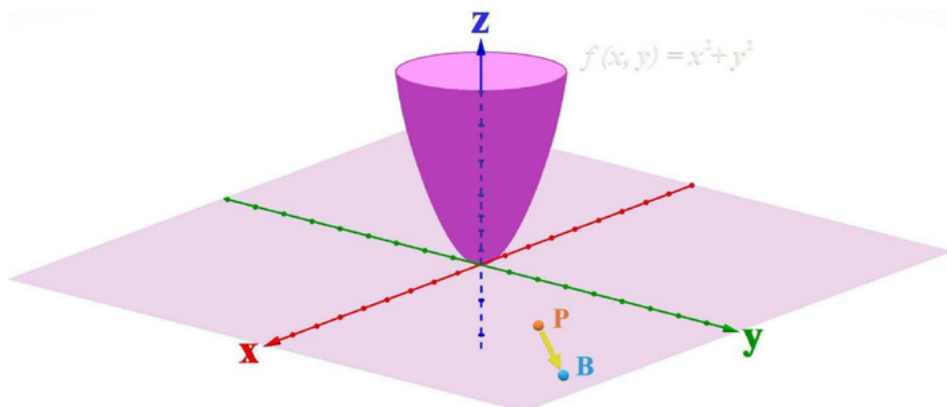
Figura 1.6 – Gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Substituindo x e y pelos valores do ponto P na equação do vetor gradiente, temos: $\vec{\nabla} f(x, y) = (6\hat{i} + 8\hat{j})$. Dessa forma, os valores escalares 6 e 8 são coordenadas para indicar em qual direção e sentido o vetor gradiente aponta. Nos eixos x e y , respectivamente, esse ponto será denominado ponto B (6, 8), conforme Figura 1.7.

Figura 1.7 – Gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ com a representação do vetor gradiente em amarelo.



Fonte: Elaborada pelos autores.

O vetor gradiente começa no ponto $P(3, 4)$ e termina no ponto $B(6, 8)$ do plano cartesiano. Portanto, no ponto P , a função tem sua maior taxa de crescimento na direção e no sentido do ponto B , conforme apontado pela seta.

Outro conceito importante para relembrarmos neste momento é o de produto escalar entre dois vetores. O produto escalar em álgebra linear é uma função de dois vetores que fornece um número real como resultado. Ele é calculado da seguinte forma: dados dois vetores $\vec{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, basta somar o produto entre as coordenadas.

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = (x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (1.3)$$

O conceito de produto escalar apresentado é empregado, por exemplo, na definição de aceleração advectiva descrita pela Equação 1.4.

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \quad (1.4)$$

Na qual $(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$ representa a aceleração advectiva, u , v e w representam as magnitudes das componentes nas direções x , y e z do espaço cartesiano e os termos $\frac{\partial \vec{V}}{\partial x}$, $\frac{\partial \vec{V}}{\partial y}$ e $\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$ são as coordenadas do vetor gradiente.

1.3 Derivada material

A derivada material D/Dt é o operador diferencial total, definido ao acompanhar uma partícula de fluido se movendo através do campo do escoamento (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Essa derivada D/Dt é composta de uma parte local para regime não permanente $\frac{\partial}{\partial t}$ e de uma parte advectiva, de movimento $\vec{V} \cdot \vec{\nabla}$, conforme Equação 1.8.

Na aplicação da derivada material, é necessária a utilização da regra da cadeia, que, segundo Hughes-Hallett *et al.* (2016), é uma regra utilizada para derivar funções compostas. A regra da cadeia permite encontrar a derivada total da função $\vec{v}$ de quatro variáveis para funções de diversas variáveis $f(x, y, z, t)$.

Desse modo, temos:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} \quad (1.5)$$

Lembrando que:

$$u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} = (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})f \quad (1.6)$$

Onde: $\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$.

Logo, podemos reescrever a Equação 1.6 do seguinte modo:



$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})f \quad (1.7)$$

Assim, podemos concluir que a derivada material é dada por:

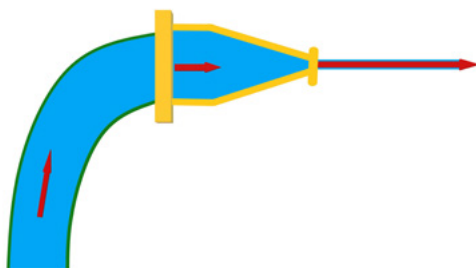
$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \quad (1.8)$$

A derivada material possibilita a obtenção de resultados interessantes. Por exemplo, ao aplicarmos a derivada material ao campo de velocidade, podemos obter o campo de aceleração (por vezes chamado de aceleração material):

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} \quad (1.9)$$

Em conformidade com Çengel e Cimbala (2015), na equação 1.9, o termo $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ representa a aceleração local, o escoamento em regime não permanente é diferente de zero, e o termo $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$ representa a aceleração advectiva, também chamada de convectiva, que pode ser diferente de zero mesmo para o escoamento permanente.

Figura 1.8 – Escoamento em uma mangueira de jardim com bocal com estreitamento. As setas vermelhas representam a velocidade.



Fonte: Adaptada de ÇENGEL; CIMBALA, 2015.

Na Figura 1.8, o escoamento na mangueira é permanente, dessa forma, a aceleração local é igual a zero. Todavia, a aceleração advectiva será diferente de zero porque no estreitamento do bocal há uma diminuição da área e, de acordo com a equação da continuidade, isso resulta em um aumento da velocidade. Tal aumento deve ser causado pela aceleração.

A aplicação da derivada material não fica restrita a vetores. Podemos, por exemplo, aplicá-la em grandezas escalares, como a pressão p :

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})p \quad (1.10)$$

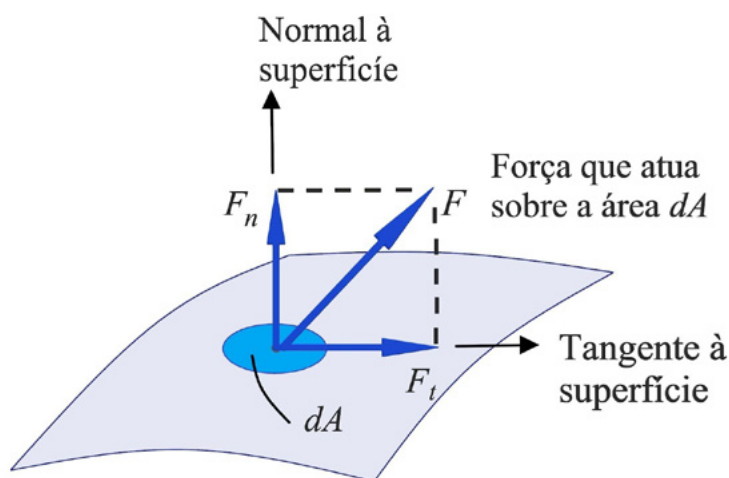
1.4 Características e propriedades dos fluidos

No texto introdutório, foi apresentado um conceito de fluido em função da estrutura molecular de materiais sólidos e materiais líquidos (fluidos) no qual o espaçamento entre as moléculas de um fluido é maior em relação àquele dos sólidos e, por esse motivo, essas moléculas apresentam maior liberdade de movimento, conferindo ao fluido a característica de ser deformável. Os gases possuem maior liberdade de movimento e maior deformação do que os fluidos líquidos, pois os espaços intermoleculares são ainda maiores e as forças intermoleculares desprezíveis.

A deformação do fluido pode ser evidenciada ao colocarmos um determinado fluido líquido em um recipiente qualquer. Será possível observar que o líquido toma a forma do recipiente no qual está contido. Isso ocorre porque, em um líquido, os grupos de moléculas movem-se entre si, mas o volume permanece relativamente constante devido às fortes forças de coesão entre as moléculas (ÇENGEL; CİMBALA, 2015).

Outra forma de evidenciar a deformação dos fluidos é submetendo-os a uma tensão de cisalhamento (força por unidade de área). Nesse caso, a componente normal da força que atua sobre a superfície por unidade de área é chamada de tensão normal, e a componente tangencial da força que atua sobre uma superfície por unidade de área é chamada de tensão de cisalhamento (Figura 1.9).

Figura 1.9 – Força normal e força cisalhante que atuam na superfície de um elemento de fluido.



Fonte: Adaptada de ÇENGEL; CIMBALA, 2015.

Sob uma tensão de cisalhamento de qualquer valor, os fluidos comuns, como a água, o óleo e o ar, se deformam continuamente e, portanto, escoam (MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004). Para entender como os fluidos escoam, é necessário definir suas propriedades mais importantes: massa específica, peso específico e volume específico.

A massa específica ρ de uma substância é definida como massa de uma substância (kg no SI) contida numa unidade de volume (m^3 no SI) (MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004). A massa específica tam-

bém pode ser chamada de densidade (ÇENGEL; CIMBALA, 2015) e é apresentada na Equação 1.11.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1.11)$$

De forma geral, a massa específica de uma substância depende da temperatura e da pressão, sendo a massa específica da maioria dos gases proporcional à pressão e inversamente proporcional à temperatura (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Na Tabela 1, são apresentados os valores de massa específica para fluidos comuns na pressão atmosférica padrão.

Tabela 1 – Propriedades físicas de alguns fluidos comuns na pressão atmosférica padrão.

Fluidos comuns	Temperatura T (°C)	Massa específica (kg/m³)
Água	15,6	999
Água do mar	15,6	1.030
Ar (padrão)	15,0	1,230
Álcool etílico	20,0	789
Gás natural (metano)	20,0	0,667
Gasolina*	15,6	680
Glicerina	20,0	1.260
Óleo SAE 30*	15,6	912
Mercúrio	20,0	13.600

Fonte: Adaptada de MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004.

Nota:

* As propriedades dos derivados do petróleo variam com a composição, por isso, são apresentados valores típicos.

A massa específica de um fluido pode ser relacionada com a massa específica de uma substância conhecida, como a da água, numa determinada temperatura. A relação entre elas é denominada

gravidade específica (ÇENGEL; CIMBALA, 2015) e é apresentada na Equação 1.12.

$$GE = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} \quad (1.12)$$

O volume específico Ψ é definido como o volume ocupado por unidade de massa da substância considerada, ou seja, é o inverso da massa específica, conforme Equação 1.13.

$$\Psi = \frac{1}{\rho} \quad (1.13)$$

O peso específico γ de uma substância é definido como o peso da substância contida numa unidade de volume. Ele relaciona a massa específica e a aceleração da gravidade local, dado em N/m^3 no SI, conforme Equação 1.14.

$$\gamma = \rho g \quad (1.14)$$

Perceba que é possível obter o valor do peso específico dos fluidos comuns, multiplicando o valor da massa específica de determinado fluido, apresentado na Tabela 1, pelo valor da aceleração da gravidade, de $9,807 \text{ m/s}^2$. O peso específico da água a $15,6 \text{ }^\circ\text{C}$, por exemplo, é de 9.797 N/m^3 ou usualmente 9.800 N/m^3 . Caso a unidade de medida seja kN/m^3 , esse valor será de 9,8.

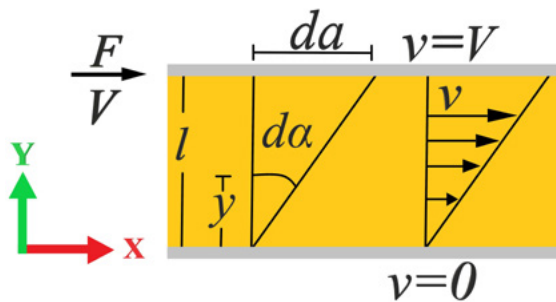
Note que existem diferenças nos conceitos de massa específica e de peso específico. O primeiro é utilizado para caracterizar a massa do sistema fluido, enquanto o segundo é utilizado para caracterizar o peso do sistema fluido (MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004).

1.5 Viscosidade

A massa específica e o peso específico de um fluido não são suficientes para determinar como os fluidos escoam, pois dois fluidos podem apresentar massas específicas semelhantes, mas se comportarem de maneira diferente. Assim, torna-se necessário uma propriedade que descreva a fluidez dos fluidos. Para isso, utilizaremos o exemplo clássico de um fluido escoando entre duas placas largas montadas paralelamente, sendo a placa inferior fixa e a superior movimentada a partir da aplicação de uma força F .

Na Figura 1.10, é possível observar que quando a força F é aplicada na placa superior, o fluido se deforma, sendo esse comportamento condizente com a definição de fluido, pois se uma força cisalhante é aplicada a um fluido, ele se deforma continuamente.

Figura 1.10 – Comportamento de um fluido com escoamento laminar entre duas placas paralelas quando a placa superior se movimenta com velocidade constante.



Fonte: Adaptada de ÇENGEL; CIMBALA, 2015.

Analisando mais detalhadamente a Figura 1.10, percebemos que, após os transientes iniciais, o fluido em contato com a placa superior se movimenta com uma velocidade constante V , enquanto o fluido em contato com a placa inferior assume a velocidade da placa fixa, que é nula. Assim, o fluido entre as duas placas se move com

velocidade $v(y) = V \frac{y}{l}$, onde y é a distância vertical da placa inferior. Note que existe um gradiente de velocidade $\frac{dv}{dy} = \frac{V}{l}$ no escoamento do fluido entre as placas.

O fato de a velocidade do fluido em contato com a placa inferior ser nula, ou seja, mesma velocidade da placa fixa, deve-se a observações experimentais importantes na Mecânica dos Fluidos, que definem essa condição como condição de não escorregamento (MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004).

Outra informação que extraímos da Figura 1.10 é a taxa de deformação, que é equivalente ao gradiente da velocidade $\frac{dv}{dy}$. Isso ocorre porque durante um intervalo de tempo infinitesimal dt , os lados das partículas do fluido ao longo de uma reta vertical da giram de um ângulo infinitesimal $d\alpha$, enquanto a placa superior move-se de uma distância infinitesimal $da = V dt$. O deslocamento angular ou deformação, também conhecido como tensão de cisalhamento, é expresso como:

$$d\alpha \approx \tan \alpha = \frac{da}{l} = \frac{V dt}{l} = \frac{dv}{dy} dt \quad (1.15)$$

De forma que a taxa de deformação sob influência de uma tensão de cisalhamento τ é dada por:

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{dv}{dy} \quad (1.16)$$

Foi verificado experimentalmente que a taxa de deformação para a maioria dos fluidos é diretamente proporcional à tensão de cisalhamento τ :

$$\tau \propto \frac{dv}{dy} \quad (1.17)$$

Os fluidos nos quais a taxa de deformação é proporcional à tensão de cisalhamento são chamados de fluidos newtonianos em homenagem a Isaac Newton, que os definiu primeiro em 1687. A maioria dos fluidos comuns, tais como a água, o ar, a gasolina e os óleos, são fluidos newtonianos (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

1.6 Escoamento incompressível e escoamento compressível

Apesar de os fluidos líquidos terem a característica de serem deformáveis e escoarem sob ação de uma tensão de cisalhamento, eles não se comprimem e são ditos incompressíveis. Os fluidos líquidos são diferentes dos gases, que além de serem mais deformáveis, são facilmente comprimidos e são ditos compressíveis.

Para entender o quão compressivo é um fluido, ou seja, o quão fácil é variar o volume de certa massa de fluido pelo aumento do valor da pressão, precisamos estudar o módulo de elasticidade volumétrico, E_V :

$$E_V = - \frac{dp}{dV/V} \quad (1.18)$$

No qual, dp é a variação diferencial de pressão necessária para provocar uma variação diferencial dV de volume em um volume V . Observe que o sinal negativo da definição representa que um aumento de pressão resultará numa diminuição do volume considerado (MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004).

Considerando que um decréscimo no volume de uma dada massa $m = \rho V$ resulta num aumento de massa específica, a Equação 1.18 pode ser reescrita:

$$E_v = \frac{dp}{d\rho/\rho} \quad (1.19)$$

Um fluido é relativamente incompressível quando o valor de seu módulo de elasticidade volumétrico é grande, ou seja, é necessária uma grande variação de pressão para criar uma variação muito pequena no volume ocupado pelo fluido (MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004).

Outros autores definem o fluido como incompressível quando a sua massa específica ρ permanece aproximadamente constante em todos os lugares em que ocorre o escoamento, de forma que o volume de cada porção do fluido não se altere ao longo do escoamento (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Lembrando que a massa específica ρ é a relação entre a massa m e o volume V , dada por $\rho = \frac{m}{V}$. Em termos matemáticos, temos que, para todo escoamento incompressível:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.20)$$

Note que o símbolo da derivada parcial ∂ representa uma variação, ou seja, a variação da massa específica ρ em relação à variação do tempo é nula e o fluido é dito incompressível. No mesmo sentido, e sabendo que a diferença entre o escoamento incompressível e o compressível é o nível de variação de sua massa específica durante o escoamento, o escoamento é denominado como compressível quando a sua massa específica varia ao longo do escoamento (ρ não é constante). Isso implica que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0 \quad (1.21)$$

Naturalmente, com os escoamentos incompressíveis, é mais fácil de se trabalhar, pois o fato de sua massa específica ser apro-

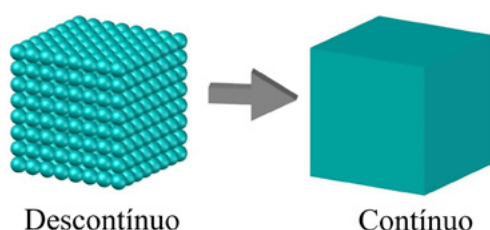
ximadamente constante permite “tirá-la” de dentro das derivadas e integrais.

Na prática, todos os fluidos são compressíveis, pois a massa específica aumenta com o aumento da pressão ou da temperatura, por exemplo (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Contudo, os líquidos sofrem uma pequena variação mediante o grande aumento da pressão, uma vez que os valores do módulo de elasticidade volumétrico dos líquidos são grandes e, por isso, são ditos incompressíveis. Já os gases sofrem uma grande variação de massa específica com um pequeno aumento de pressão, fato que os caracteriza como altamente compressíveis (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

1.7 Fluido contínuo (sob o ponto de vista macroscópico)

Sob o ponto de vista microscópico, o fluido é constituído por partículas que estão constantemente em colisão, interagindo umas com as outras. Entre essas partículas extremamente pequenas encontram-se alguns vazios. No entanto, para efeito de simplificação, quando analisamos o fluido de maneira macroscópica, trabalhamos com a hipótese do contínuo, conforme a Figura 1.11. Isso implica que desconsideramos a forma das moléculas e os vazios entre elas (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

Figura 1.11 – Representação da abordagem de fluidos como descontínuos e contínuos.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Vale destacar que a hipótese do contínuo é válida somente quando a escala característica do domínio (dimensão principal do volume de controle) é muito maior que a distância livre média entre partículas. Sem isso, alguns meios gasosos não poderiam ser considerados como contínuos.

1.8 Escoamento estacionário

Um escoamento é dito estacionário (ou permanente) quando não há mudança em suas propriedades, como velocidade, pressão e temperatura, ao longo do tempo (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Observe que essas propriedades não variam ao longo do tempo, mas podem variar em diferentes pontos do escoamento. Caso as propriedades não mudem em relação à sua posição, o escoamento também será classificado como uniforme.

Na prática, a maioria dos escoamentos são não estacionários, como a injeção de ar e gasolina nos cilindros de um motor em automóveis ou o escoamento da água em uma sarjeta após o início de uma chuva. Contudo, no primeiro caso, a injeção da mistura ocorre de forma periódica, ou seja, podemos usar valores médios em relação ao tempo para as propriedades e, assim, simplificar o escoamento como estacionário.

1.9 Variáveis de campo

Variáveis de campo são variáveis que estão em função da posição e do tempo, ou seja, para cada posição e para cada instante de tempo, a variável pode assumir valores diferentes. Se esses valores forem escalares, temos uma variável de campo escalar, por exemplo, o campo de pressão. Caso esses valores sejam vetoriais, temos uma variável de campo vetorial, por exemplo, os campos de velocidade e de aceleração.



1.9.1 Campo de pressão

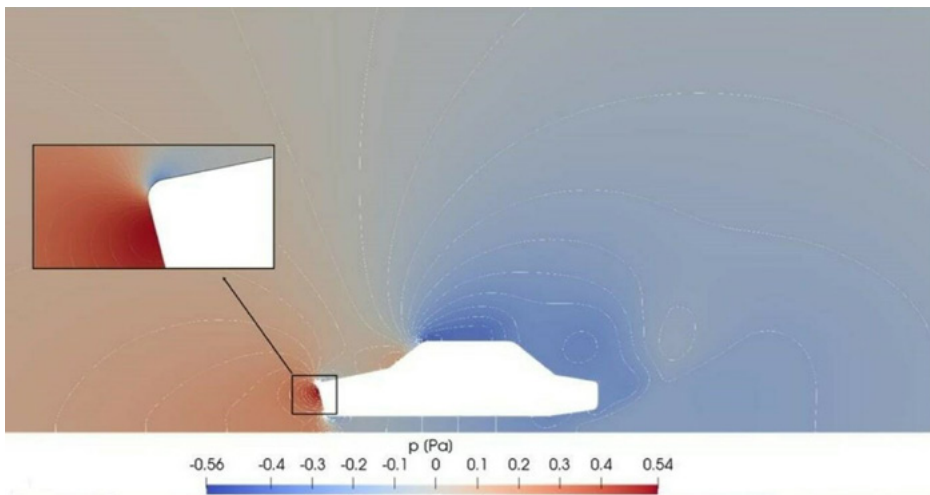
O campo de pressão p é uma variável de campo escalar, ou seja, para cada ponto do espaço euclidiano com coordenadas (x, y, z) em algum instante t , temos a ele associado um valor de pressão (escalar) (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Assim, temos:

$$p = p(x, y, z, t)$$

(1.22)

Basicamente, o que o campo de pressão faz é informar o valor da pressão na posição desejada em certo instante de tempo. Na Figura 1.12, temos uma representação gráfica do campo de pressão gerado em um escoamento de ar ao redor de um modelo Ford Corcel 1, para um número de Reynolds de 1.800 no instante de 1 segundo.

Figura 1.12 – Representação gráfica do campo de pressão gerado em um escoamento de ar ao redor de um modelo Ford Corcel 1.



Fonte: SANTOS; BORNSCHLEGELL, 2019.

Podemos notar que a região destacada possui uma elevada pressão por se tratar de um ponto de estagnação, ou seja, nesse

ponto, a face frontal do modelo impede o escoamento do fluido, o que gera uma transformação da energia cinética em energia de pressão.

1.9.2 Campo de velocidade

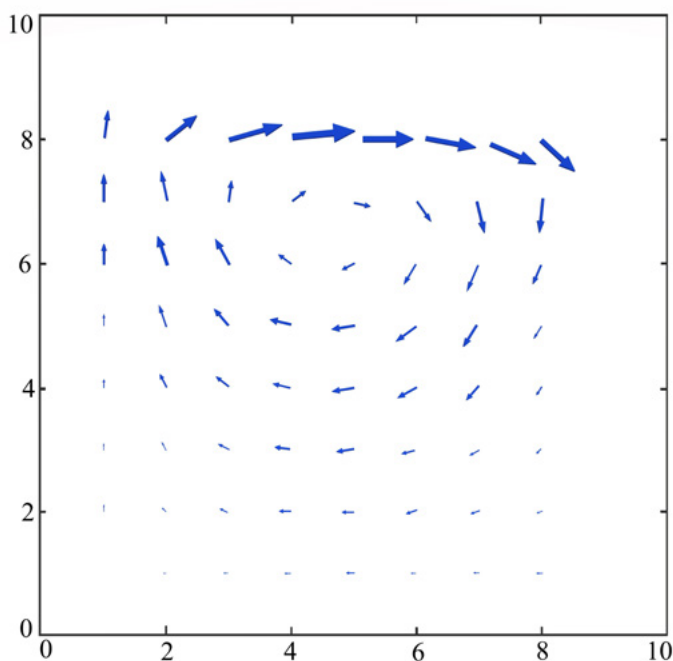
O campo de velocidade é uma variável de campo vetorial. Em outras palavras, para cada ponto do espaço euclidiano com coordenadas (x, y, z) em algum instante t , tem-se a ele associado uma velocidade (vetor) (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Dessa forma, temos:

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$$

(1.23)

De maneira análoga à pressão, o campo de velocidade informa o quão rápido, em que direção e em que sentido estão se movendo as partículas em determinada posição do espaço. A Figura 1.13 mostra um campo de velocidade gerado em uma cavidade com tampa deslizante. Observe que é possível saber a direção e o sentido do escoamento do fluido por causa do deslizamento da tampa. O campo de velocidade é uma das funções mais importantes para a caracterização de um escoamento.

Figura 1.13 – Campo de velocidade gerado em uma cavidade com tampa deslizante.



Fonte: Elaborada pelos autores.

1.9.3 Campo de aceleração

Assim como o campo de velocidade, o campo de aceleração também é uma variável de campo vetorial. Para cada ponto do espaço, ele associa um valor de aceleração, direção e sentido em um determinado instante de tempo (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Desse modo, temos:

$$\vec{a} = \vec{a}(x, y, z, t)$$

(1.24)

Aplicando a descrição lagrangiana, isto é, acompanhando uma partícula material de fluido de massa m , temos um vetor posição:

$$\vec{r} = (x_{partícula}(t), y_{partícula}(t), z_{partícula}(t)) \quad (1.25)$$

Essa notação significa que a posição da partícula é considerada como uma função do tempo, sendo a única variável independente. Porém, do ponto de vista euleriano, seriam necessárias algumas manipulações matemáticas para que essas expressões pudessem ser aplicáveis. Por exemplo, sabemos da mecânica geral que a velocidade e a aceleração de uma partícula qualquer são dadas pelas Equações 1.26 e 1.27:

$$\vec{v}_{partícula} = \frac{d\vec{r}_{partícula}}{dt} \quad (1.26)$$

$$\vec{a}_{partícula} = \frac{d\vec{v}_{partícula}}{dt} \quad (1.27)$$

Observe que a derivada é representada por d . A velocidade de uma partícula depende de sua posição no espaço e do instante de tempo, ou seja, $\vec{v}_{partícula} = (x_{partícula}(t), y_{partícula}(t), z_{partícula}(t))$, por isso usaremos a regra da cadeia, conforme apresentado na seção 1.4.

$$\vec{a}_{partícula} = \frac{d\vec{v}(x_{partícula}, y_{partícula}, z_{partícula}, t)}{dt} \quad (1.28)$$

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_{partícula}} \frac{dx_{partícula}}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y_{partícula}} \frac{dy_{partícula}}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z_{partícula}} \frac{dz_{partícula}}{dt} \quad (1.29)$$

$$a(x, y, z, t) = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z} \quad (1.30)$$

A regra da cadeia é aplicada por ser derivada do campo de aceleração, que depende do campo de velocidade.

1.10 Algumas observações sobre a velocidade

Quando o assunto é velocidade, faz-se referência à velocidade vetorial $\vec{V}$ ou à magnitude da velocidade V . A magnitude da velocidade significa que serão representados somente o módulo (valor numérico) e a unidade de medida da grandeza velocidade. Perceba que não há representação da direção, como na grandeza vetorial (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016).

Também podemos nos referir à velocidade como média, entendendo que velocidade média, segundo Nussenzveig (2002), é a diferença entre dois vetores posição, dividido pelo intervalo de tempo que foi gasto para que ocorra a mudança de posição:

$$\vec{V}_{\text{méd}} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

(1.31)

Lembrando que se não há mudança de posição, a velocidade média é zero. Exemplificando: em uma rodovia, um motorista altera diversas vezes a sua velocidade ao longo de uma trajetória retilínea, no sentido positivo do eixo x . No entanto, se ele termina o percurso de 200 quilômetros em 2 horas, e se a posição e o tempo iniciais são iguais a zero, sua velocidade média será de 100 km/h. Dessa forma, é considerado que, ao longo de todo o percurso, ele utilizou essa velocidade, sendo, assim, desconsideradas as outras velocidades que podem ter sido adotadas durante o percurso, como mostra a Figura 1.14.

Figura 1.14 – Parâmetros para cálculo da velocidade média (posição e tempo iniciais e finais).



Fonte: Elabora pelos autores.

A velocidade instantânea $\vec{v}$, por sua vez, é a velocidade em uma determinada posição em um certo instante de tempo. Essa velocidade é o valor para o qual tende a velocidade $\vec{v}_{\text{méd}}$ quando o intervalo de tempo Δt tende a zero (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016) e é definida pela Equação 1.32 como:

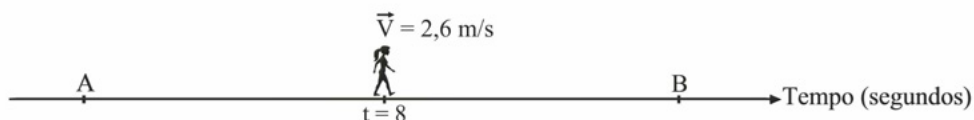
$$\vec{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.32)$$

Na Figura 1.15, uma pessoa se desloca do ponto A ao ponto B, sendo que a função que descreve esse movimento retilíneo é dada por $\vec{r} = (0,1t^2 + t)\hat{i}$, onde o deslocamento é medido em metros e o tempo em segundos, e o versor $\hat{i}$ na função indica que o deslocamento ocorre em apenas um eixo. Dessa forma, é possível calcular a velocidade instantânea da pessoa em $t = 8 \text{ s}$. Sabe-se, pela Equação 1.32, que a velocidade instantânea é encontrada aplicando a derivada na função deslocamento. Então, temos:

$$\vec{r} = (0,1t^2 + t)\hat{i}$$

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = (2 \times 0,1t + 1)\hat{i}$, e, substituindo no tempo $t = 8 \text{ s}$, a velocidade será de $2,6 \hat{i} \text{ m/s}$.

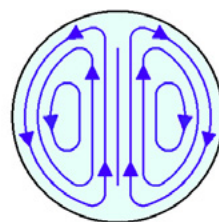
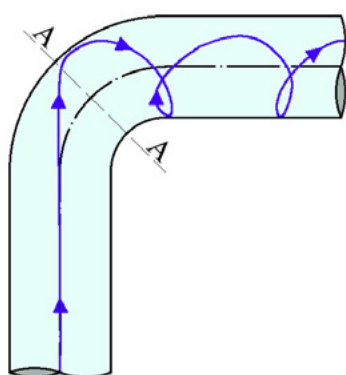
Figura 1.15 – Velocidade instantânea em $t=8\text{ s}$.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Quando se trata da velocidade de um fluido que escoar em uma tubulação de seção circular, a geometria envolvida é tridimensional e a velocidade pode variar em todas as três dimensões. A Figura 1.16 mostra o escoamento de água por uma curva de 90° . Nesse trecho, o escoamento é fortemente tridimensional, pois o fluido não pode fazer curvas bruscas facilmente, tornando o escoamento caótico, ou seja, há uma grande variação de velocidade nas três dimensões. Quando o fluido entra na curva, o escoamento se separa no lado interno — assim como um carro que é jogado para fora da estrada ao entrar muito rápido em uma curva — e surge um escoamento secundário devido aos redemoinhos turbulentos no local (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

Figura 1.16 – Escoamento tridimensional.



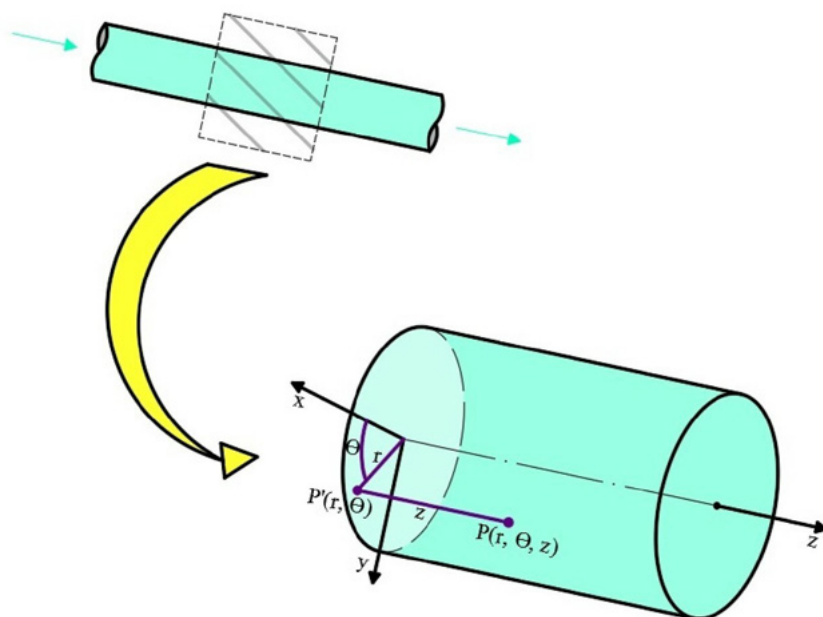
Corte AA: vista do
escoamento secundário

Fonte: Adaptada de LENCASTRE, 1996.

Quando a variação da velocidade em determinadas direções é pequena em comparação com as outras, podemos ignorar a variação da velocidade nessas direções e, assim, simplificar o escoamento como uni ou bidimensional (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

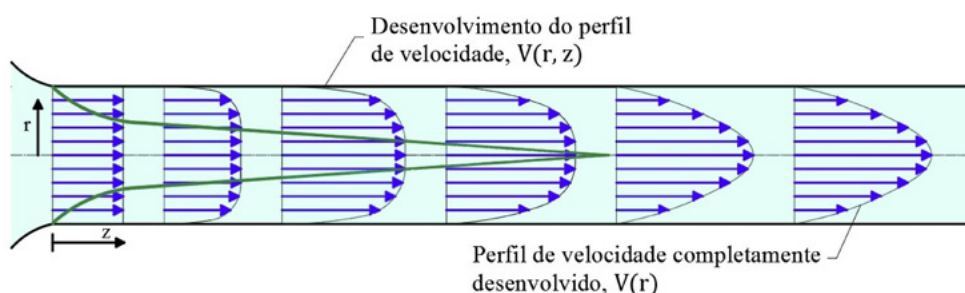
Na Figura 1.16, temos um exemplo de escoamento de fluido em um cotovelo de 90°. Para fazer a análise do perfil de velocidade, vamos considerar o sistema de coordenadas cilíndricas, onde a velocidade pode variar em relação ao raio do tubo r , ao ângulo θ e ao eixo z , ou seja, $V(r, \theta, z)$. Antes de prosseguir com a análise do perfil de velocidade na Figura 1.18, vamos entender melhor o funcionamento do sistema de coordenadas cilíndricas. Observando a Figura 1.17, o ponto P no espaço tridimensional é representado pela tripla ordenada (r, θ, z) , onde r e θ são as coordenadas polares da projeção de P no plano xy , e z representa a distância orientada do plano xy a P (STEWART, 2013).

Figura 1.17 – Representação de um ponto P de um tubo no espaço tridimensional em coordenadas polares.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 1.18 – Desenvolvimento do perfil de velocidade de um tubo circular em coordenadas cilíndricas.



Fonte: Adaptada de ÇENGEL; CIMBALA, 2015.

A velocidade do fluido em contato com a parede da tubulação é nula devido à condição de não escorregamento (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Na região de entrada e próximo a ela, o escoamento é bidimensional, tendo em vista que a velocidade varia nas direções r e z , mas não na direção do ângulo θ . Depois de certa distância da entrada, o perfil de velocidade se desenvolve completamente e não ocorre mais variações na direção z , sendo denominado completamente desenvolvido. O escoamento completamente desenvolvido em uma tubulação circular é unidimensional, pois a velocidade varia apenas na direção r , ou seja, $V(r)$ (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

1.11 Momento linear

O momento linear $\vec{Q}$ (ou quantidade de movimento linear) é uma grandeza vetorial definida como o produto da massa m de um corpo por sua velocidade $\vec{V}$ (HELERBROCK, [20--]), conforme a Equação 1.33.

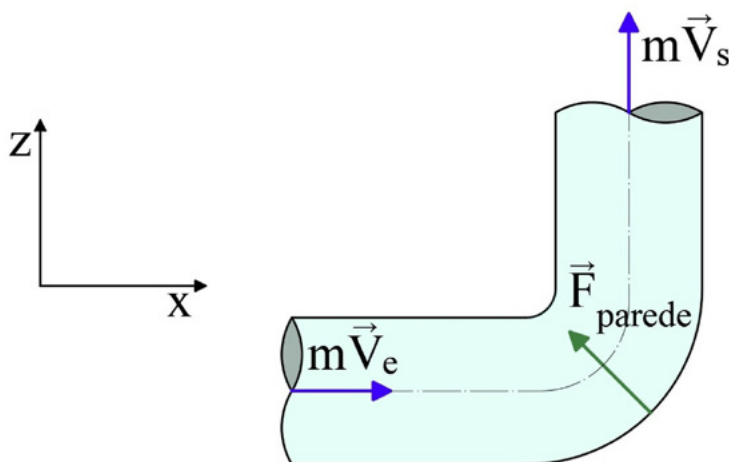
$$\vec{Q} = m \vec{V}$$

(1.33)

O momento linear é uma grandeza essencial para o estudo da transferência de movimento em sistemas com dois ou mais corpos onde ocorrem colisões ou quaisquer formas de interação entre corpos (HELERBROCK, [20--]). A quantidade de movimento em um sistema permanece constante quando a força resultante que age sobre ele é zero (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

A Figura 1.19 ilustra a colisão de água na parede de um tubo ao passar por uma conexão. Essa interação provoca uma variação na quantidade de movimento do sistema, pois, quando a água colide com a parede da tubulação, surge uma força externa que muda a direção do escoamento. Sendo assim, apesar da quantidade de massa do fluido e do módulo da velocidade permanecerem constantes na entrada e na saída, a direção da velocidade é alterada e, como o momento linear é uma grandeza vetorial, essa mudança de direção provoca uma variação na quantidade de movimento.

Figura 1.19 – Momento linear em um tubo.



Fonte: Elaborada pelos autores.

1.12 Energia cinética

A energia cinética é uma grandeza associada ao movimento de um corpo (ou partícula). A energia cinética de uma partícula de massa m e velocidade V é dada por:

$$E_c = \frac{1}{2} m V^2$$

(1.34)

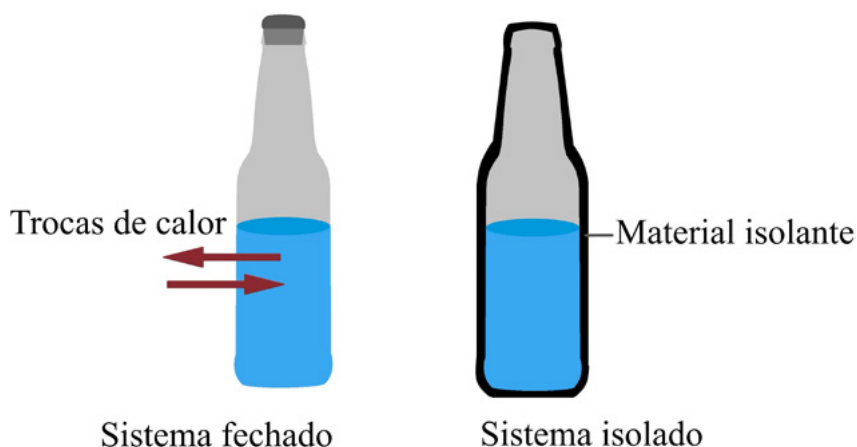
Note que a energia cinética é uma grandeza escalar, pois ela utiliza apenas a intensidade da velocidade. Em outras palavras, não importa a direção ou o sentido do movimento da partícula, a sua energia só depende do quão rápido ela se move (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016).

Aproveitando o exemplo da Figura 1.19, podemos concluir que, como o fluido possui massa e velocidade, ele também possui energia cinética. Ademais, supondo que a tubulação é extensa, ocorrerá uma perda de energia provocada pela força dissipativa do atrito, que transforma a energia cinética em energia térmica (BRUNETTI, 2012).

1.13 Análise de sistemas [fechados]

Um sistema fechado é aquele no qual não há troca de matéria entre o sistema e o meio externo, porém não há restrição quanto à troca de energia. Não se deve confundir sistema fechado (vizinhança) com o sistema isolado. No sistema isolado, além de não ocorrer troca de matéria, também não ocorre troca de energia (SILVA, [20--]). Podemos destacar a diferença entre os sistemas com o exemplo de uma garrafa, que constitui o sistema em estudo, contendo água com corante aquecida inicialmente, conforme apresentado na Figura 1.20.

Figura 1.20 – Exemplo de sistema fechado (garrafa) e isolado (garrafa com isolamento térmico).



Fonte: Elaborada pelos autores.

A garrafa com tampa, sistema fechado, não troca matéria com o meio, não perde vapor de água, mas troca calor porque a água está mais quente que o meio externo e não há um material que impeça as trocas de energia térmica, havendo a tendência a esfriar. O sistema fechado também é chamado de sistema de identidade fixa (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

É interessante observar o sistema de identidade fixa, pois as equações do movimento do escoamento dos fluidos, tais como a Segunda Lei de Newton, são escritas para um objeto de identidade fixa (um sistema fechado), ou seja, uma pequena porção de fluido que chamamos de partícula de fluido ou partícula material (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

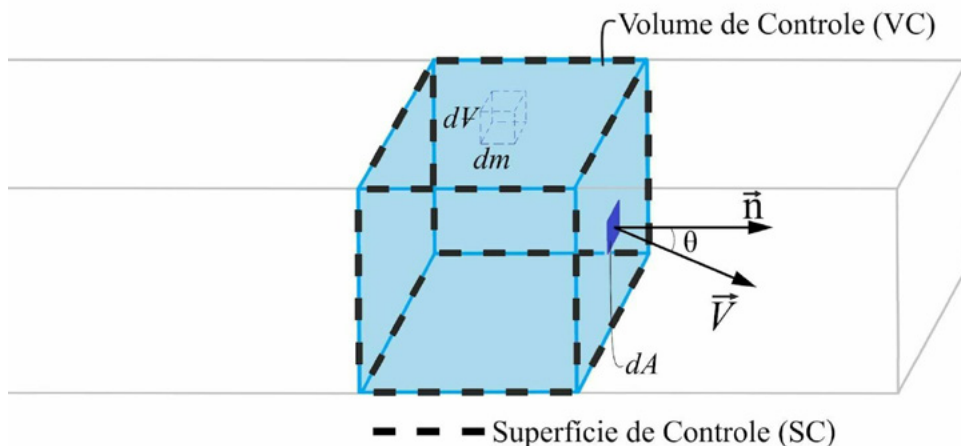
No sistema isolado, a garrafa não troca matéria nem energia e, portanto, não troca energia térmica com o meio externo, uma vez que ela está fechada e é feita com materiais que impedem grandes trocas de calor. O conceito de sistema isolado é bem definido na teoria, mas, na prática, dificilmente se impede a troca de energia entre meios.

1.14 Volume de controle [sistema aberto]

O volume de controle em Mecânica dos Fluidos é uma região arbitrária do espaço (ÇENGEL; CIMBALA, 2015) pela qual o fluido escoa. O contorno dessa região é denominado superfície de controle, que pode ser fixa, móvel ou deformável durante o escoamento. Em um volume de controle pode haver troca de energia com o meio e também transferência de matéria, que ocorre através das superfícies de controle. Isso implica que, diferentemente do sistema fechado, onde a massa é fixa, no volume de controle, o volume é fixo (quando as fronteiras são fixas), porém a massa pode variar no tempo.

O conceito de volume de controle é extremamente importante no estudo de problemas que envolvem o escoamento. Podemos adotar como volume de controle a forma e o tamanho que forem mais convenientes para a análise. A Figura 1.21 ilustra um volume de controle destacando a superfície de controle e um elemento infinitesimal em seu interior.

Figura 1.21 – Uma parcela de fluido escoando ao longo de uma tubulação definida como volume de controle.



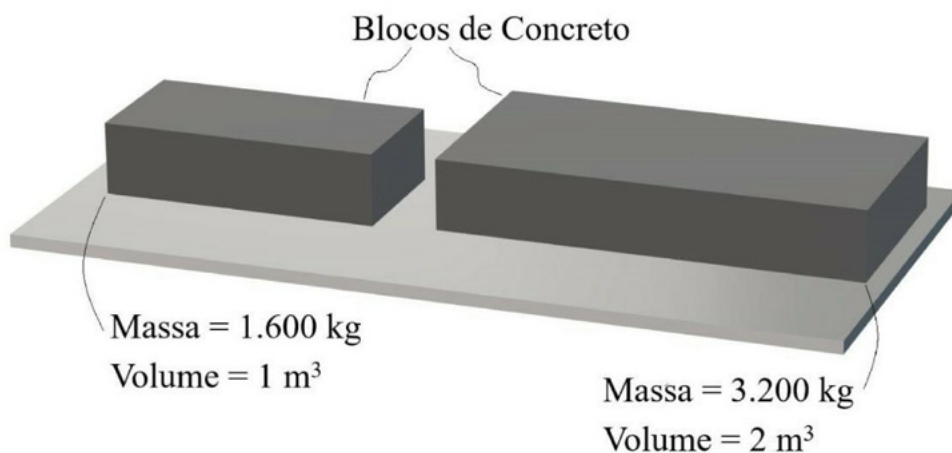
Fonte: Elaborada pelos autores.

1.15 Propriedades extensivas e intensivas

As propriedades extensivas de um sistema são dependentes da quantidade de matéria que constitui o sistema, como a massa, o volume e a energia. Já as propriedades intensivas de um sistema são independentes da quantidade de matéria do sistema, como a temperatura e a massa específica (FOGAÇA, [20--]).

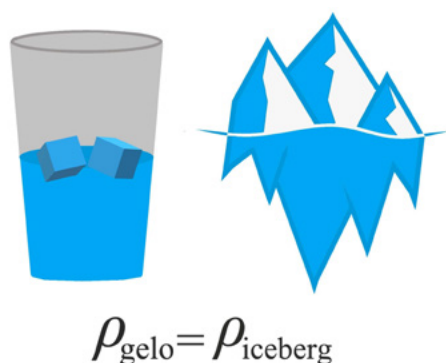
Para ilustrar a dependência da massa do corpo nas propriedades extensivas e a independência nas propriedades intensivas, observe a Figura 1.22, a qual demonstra que o volume de um bloco de concreto varia com a quantidade de matéria, sendo a massa a mesma nos dois blocos (observe a relação entre os valores de massa e volume nos dois blocos de concreto).

Figura 1.22 – O volume de concreto aumenta com o aumento de massa.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 1.23 – As massas específicas do cubo de gelo e do iceberg são iguais.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Na Figura 1.23, mostramos que, apesar da grande diferença entre suas massas, a massa específica do cubo de gelo e do iceberg é a mesma.

Uma propriedade extensiva dividida pela massa resulta em uma propriedade intensiva correspondente (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Por exemplo, o momento linear $\vec{Q}$ é uma propriedade extensiva encontrada a partir do produto da velocidade pela massa $m\vec{v}$, como vimos na seção 1.11 deste capítulo. Ao dividir $m\vec{v}$ pela massa m , obtemos $\vec{v}$, que é uma propriedade intensiva.

1.16 Leis de conservação

Uma lei de conservação em um sistema físico isolado é aquela que afirma que determinada propriedade em um sistema físico não muda com o tempo (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Cabe destacar que, nos sistemas em contato com vizinhanças, existem diversas trocas de grandezas físicas, de modo que essas grandezas podem ou não variar com o tempo. Alguns exemplos de leis de conservação são: lei de conservação da massa, lei de conservação da energia e lei de

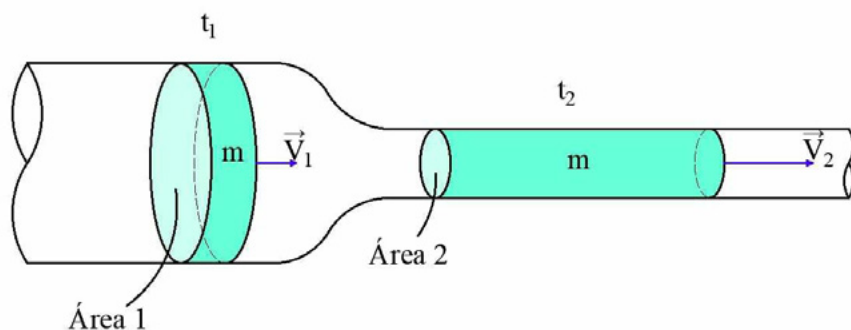
conservação do momento linear. As teorias referentes a essas leis serão apresentadas com maior profundidade nos capítulos 3, 4 e 5, respectivamente.

1.16.1 Conservação de massa

Assim como a energia, a massa é uma propriedade conservada e não pode ser criada nem destruída durante um processo (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). É importante ressaltar que a energia de um sistema pode variar com o tempo, exceto se o sistema for isolado.

Para sistemas fechados, o princípio da conservação de massa é usado implicitamente com a exigência de que a massa do sistema permaneça constante durante um processo. Entretanto, para os volumes de controle, a massa pode cruzar as fronteiras e, assim, devemos controlar a quantidade de massa que entra e sai do volume de controle (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Nesse sentido, considerando que não há trocas com o meio externo, a massa que entra em um volume de controle (Figura 1.24) deve ser a mesma que sai.

Figura 1.24 – Fluido escoando de um tubo com diâmetro maior para outro de diâmetro menor.



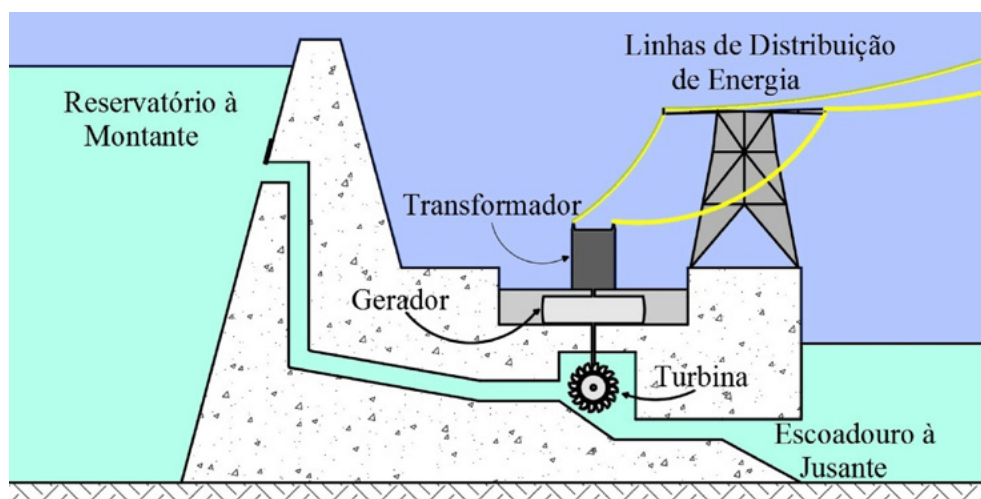
Fonte: Elaborada pelos autores.

Na Figura 1.24, a conservação de massa é respeitada porque o fluido escoar do tubo de maior diâmetro para o de menor diâmetro de modo que, para compensar a diferença do tamanho da área e conseguir escoar a mesma quantidade de massa, aumenta a sua velocidade. O exemplo da Figura 1.24 será mais bem esclarecido no capítulo 3, onde será apresentada a equação da conservação de massa.

1.16.2 Primeira lei da termodinâmica

A primeira lei da termodinâmica é também conhecida como Princípio da Conservação de Energia. Esse princípio exige que a transferência de energia líquida de ou para um sistema durante um processo seja igual à variação da energia contida no sistema. Para volumes de controle, a transferência de energia se dá por meio do escoamento de massa (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). A primeira lei da termodinâmica também afirma que a energia é uma propriedade termodinâmica. Como exemplo da conservação de energia, vamos analisar o funcionamento de uma usina hidrelétrica (Figura 1.25).

Figura 1.25 – Geração de energia em uma usina hidrelétrica.



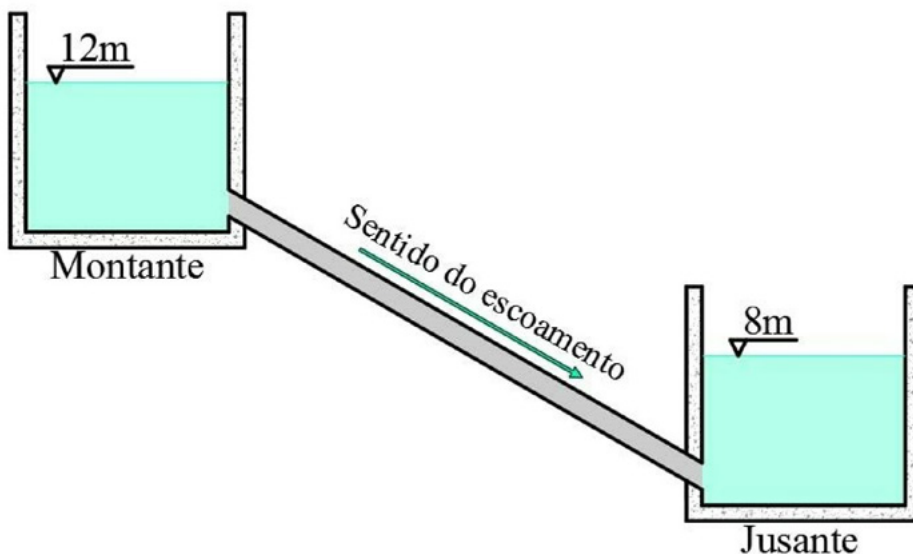
Fonte: Elaborada pelos autores.

Por meio de uma tubulação, a água de montante, que armazena energia potencial gravitacional, é direcionada para as pás de uma turbina. Durante o percurso, a energia potencial da água é transformada em energia cinética, que, posteriormente, ao movimentar as pás da turbina, é convertida em energia elétrica em um equipamento chamado gerador, o qual está acoplado na turbina. Em seguida, a energia passa para o transformador, onde sua voltagem é aumentada, o que facilita a transmissão de energia nas linhas de distribuição. Portanto, a energia total do sistema é conservada considerando uma situação ideal, tendo em vista que, na prática, uma parte da energia é convertida em energia térmica e dissipada para fora do sistema devido às forças de atrito, entre outros fatores.

1.17 Montante e jusante

Na Mecânica dos Fluidos, os termos montante e jusante referem-se ao sentido do escoamento. No caso de um rio, a nascente caracteriza a montante (início do escoamento) e sua foz caracteriza a jusante (final do escoamento) (CAVALCANTI, 2011). Um exemplo de montante e jusante é apresentado na Figura 1.26, na qual podemos ver que o fluido escoar por gravidade de um reservatório de montante, na cota de 12 m, para um reservatório de jusante, na cota de 8 m.

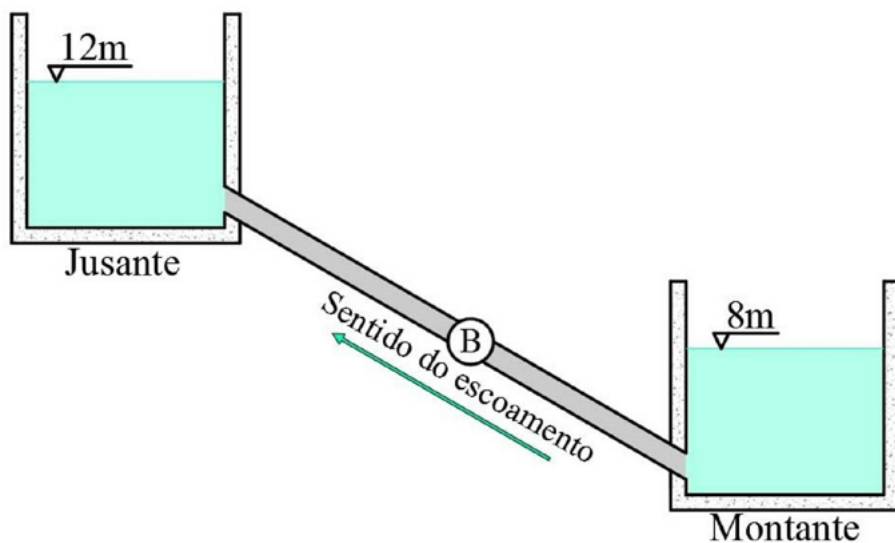
Figura 1.26 – Montante e jusante em dois reservatórios.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Quando temos dois reservatórios de água com cotas diferentes, onde um dos reservatórios está a uma altura mais elevada do que o outro, é comum considerar como montante o reservatório com maior altura e como jusante o de menor, já que o escoamento segue a gravidade. Entretanto, se tivermos uma bomba hidráulica, máquina que fornece energia ao sistema, podemos ter a montante, onde começa o escoamento, em uma cota mais baixa e a jusante, onde termina o escoamento, em uma cota mais alta, conforme exemplo da Figura 1.27.

Figura 1.27 – Montante e jusante em dois reservatórios que possuem uma bomba hidráulica entre eles.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Referências

BRUNETTI, F. **Mecânica dos fluidos**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

CAVALCANTI, M. Montante ou jusante? **Mundo Geo**, Curitiba, 9 fev. 2011. Disponível em: <https://mundogeo.com/2009/09/23/jusante-ou-montante/>. Acesso em: 29 abr. 2020.

ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. **Mecânica dos fluidos: fundamentos e aplicações**. 3. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2015.

FOGAÇA, J. R. V. Propriedades intensivas e extensivas. **Brasil Escola**, Goiânia, [20--]. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/quimica/propriedades-intensivas-extensivas.htm>. Acesso em: 29 abr. 2020.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

HELERBROCK, R. O que é momento linear? **Brasil Escola**, Goiânia, [20--]. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/fisica/o-que-e-momento-linear.htm>. Acesso em: 18 abr. 2020.

HIBBELER, R. C. **Mecânica: estática**. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

HUGHES-HALLETT, D. *et al.* **Cálculo e aplicações**. 7. ed. Rio de Janeiro: Blucher, 2016.

LENCASTRE, A. **Manual de hidráulica geral**. Lisboa: Armando Lencastrre, 1996.

MARQUES, G. da C. **Fundamentos da matemática II: grandezas escalares e vetoriais**. Licenciatura em Ciência. São Paulo: USP: UNIVESP, [202-]. Disponível em: https://midia.atp.usp.br/plc/plc0016/impressos/plc0016_top01.pdf. Acesso em: 16 abr. 2020.

MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. **Fundamentos da mecânica dos fluidos**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2004.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica**. 4. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2002.

SALMERON, R. A. **Grandezas vetoriais e grandezas escalares**. São Paulo: Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada: USP, 2003. Disponível em: http://www.cepa.if.usp.br/e-fisica/eletricidade/basico/cap00_intr/cap00intr_04.htm. Acesso em: 30 abr. 2020.

SANTOS, M. F.; BORNSCHLEGELL, A. S. Análise numérica e experimental do escoamento em torno de um automóvel modelo Ford Corcel I. *In*: CONGRESSO NACIONAL DE ESTUDANTES DE ENGENHARIA MECÂNICA, 26., 2019, Ilhéus. **Anais [...]**. Ilhéus: ABCM, 2019. p. 3-7.

SILVA, D. C. M. da. Lei da conservação da quantidade de movimento. **Brasil Escola**, Goiânia, [20--]. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/fisica/lei-conservacao-quantidade-movimento.htm>. Acesso em: 29 abr. 2020.

STEWART, J. **Cálculo**. 10. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. 2 v.

CINEMÁTICA DOS FLUIDOS

A cinemática dos fluidos estuda a descrição do movimento do fluido sem necessariamente analisar as forças e os momentos responsáveis por tal movimento (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Para descrever o movimento, duas abordagens fundamentais são apresentadas neste capítulo: a descrição lagrangiana e a descrição euleriana.

A descrição lagrangiana, em relação à descrição euleriana, na qual se define um volume de controle para o escoamento do fluido, é de difícil aplicação devido à sua característica de acompanhar individualmente as partículas do fluido. As leis de Newton, utilizadas para descrever o movimento, são conceitos fundamentalmente lagrangianos, daí a necessidade de estudar os métodos de transformação dos conceitos descritos na abordagem lagrangiana para a abordagem euleriana.

A derivada material para partículas de fluido infinitesimais, apresentada no Capítulo 1, e o Teorema de Transporte de Reynolds (TTR) para volume de controle com tamanho finito são métodos de transformação de conceitos da abordagem lagrangiana para a euleriana, e tanto a derivada material quanto o TTR podem ser aplicados a qualquer propriedade de fluido, escalar ou vetorial (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Além da descrição lagrangiana e da descrição euleriana, são apresentadas, neste capítulo, algumas formas de visualizar o escoamento e o Teorema de Transporte de Reynolds.

2.1 Descrição lagrangiana e euleriana

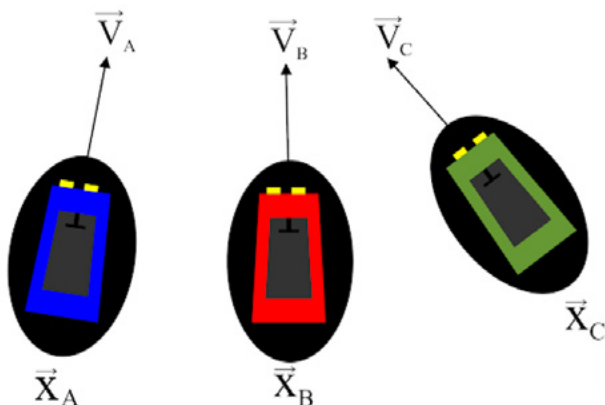
Por meio das leis de Newton, podemos estudar o movimento de objetos determinando sua posição, velocidade e aceleração, além de prever o que ocorre quando um objeto interage com outro, observando as propriedades do movimento, como a transferência de energia cinética e o momento linear (HELERBROCK, [20--]).

Devido à dificuldade de definir, identificar e acompanhar as partículas de um fluido isoladamente, seu estudo complicado requer um método especial de análise (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Existem dois métodos fundamentais para descrever o escoamento de fluidos: o método de descrição lagrangiana e o método de descrição euleriana.

O método de descrição lagrangiana é caracterizado por analisar o movimento das partículas individualmente, considerando um sistema fechado (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). No estudo do movimento (cinemática) pela descrição lagrangiana, basicamente acompanhamos o vetor posição e o vetor velocidade de um objeto como função do tempo (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). A descrição lagrangiana é útil para alguns casos específicos, como em Mecânica dos Sólidos, mas em outros casos é pouco eficiente (SANTOS, 2018). É como se esse método buscasse acompanhar a posição de cada partícula, determinando sua velocidade e levando em conta as interações com todas as outras partículas (SANTOS, 2018).

Imagine um parque de diversões com alguns carrinhos de bate-bate. É viável acompanhar a posição de cada um deles no decorrer do tempo, analisar as colisões e determinar a sua velocidade e trajetória, conforme Figura 2.1.

Figura 2.1 – Vetores velocidade de carrinhos de bate-bate.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Agora pense que esses carrinhos são moléculas de fluido escoando em uma tubulação. A quantidade de elementos interagindo entre si é tão absurda que é impraticável acompanhar as partículas isoladamente.

O método de descrição euleriana, por sua vez, consiste em analisar uma posição do espaço para determinado tempo e não o movimento individual de uma partícula (VEGINI, 2007). Desse modo, analisa-se as propriedades do fluido em uma determinada posição de interesse para um certo instante de tempo. Ainda no exemplo do parque de diversões, sob essa nova perspectiva, podemos fixar uma determinada região e estudar as características dos carrinhos que passam por ali.

Outra forma de comparar essas duas abordagens seria imaginar que você quer aferir a temperatura de um rio. Na abordagem lagrangiana, você pegaria um barco, andaria na mesma velocidade do rio e colocaria o termômetro na água, aferindo a temperatura em uma “partícula” que se movimenta. Já na descrição euleriana, você deveria ficar parado e fixar o termômetro em um ponto. Veja, na Figura 2.2, o Sr. Euler está usando a abordagem euleriana, enquanto o Sr. Lagrange utiliza sua própria abordagem.

Figura 2.2 – A abordagem de Lagrange vs a de Euler.



Fonte: Adaptada de FLOW ILLUSTRATOR, 2020.

O nome do método “descrição lagrangiana” do movimento do fluido é uma homenagem ao matemático italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813), assim como a “descrição euleriana” do movimento de fluidos é em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).

Embora as equações adequadas para a análise de volumes de controle sejam derivadas de equações cujas leis básicas são aplicadas a sistemas, na Mecânica dos Fluidos, a solução de problemas é menos complicada quando, em vez de sistemas, utilizamos volume de controle, ou seja, a descrição euleriana quase sempre é mais conveniente do que a descrição lagrangiana para a análise de problemas da Mecânica dos Fluidos (ÇENGEL; CIMBALA, 2015; MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004).

Para a análise das equações desenvolvidas sob o ponto de vista lagrangiano, como volume de controle (euleriano), é necessário ter

a noção de que tanto o sistema quanto o volume de controle podem ocupar o mesmo espaço em um certo instante de tempo e ter conhecimento do Teorema de Transporte de Reynolds (MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004).

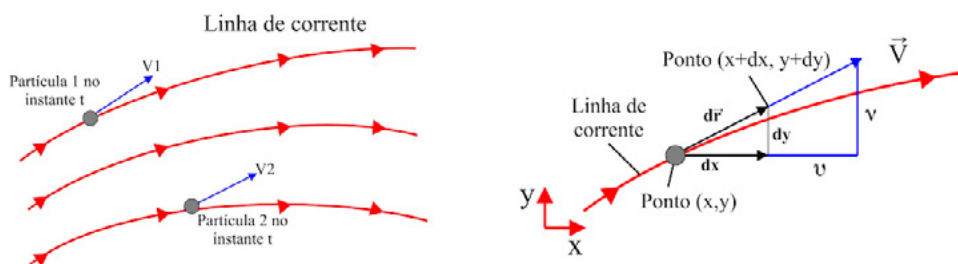
2.2 Fundamentos de visualização do escoamento

A mente humana tem a capacidade de processar rapidamente uma grande quantidade de informações visuais, portanto, ainda que a representação de um fenômeno físico, como é o caso do escoamento de um fluido, seja realizada a partir da dinâmica dos fluidos computacional, a visualização do escoamento é essencial para o entendimento e a análise do fenômeno (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

Os padrões de escoamento podem ser visualizados tanto na prática, quanto em experimentos. Alguns desses padrões são apresentados a seguir:

Linha de corrente: para um instante de tempo t , a linha de corrente é definida como sendo a linha tangente aos vetores velocidade, ou seja, não há fluxo de massa que atravesse uma linha de corrente. Logo, no plano 2D, o fluido entre duas linhas de corrente fica confinado entre elas. Na Figura 2.3, observamos as linhas de corrente tangente ao vetor velocidade.

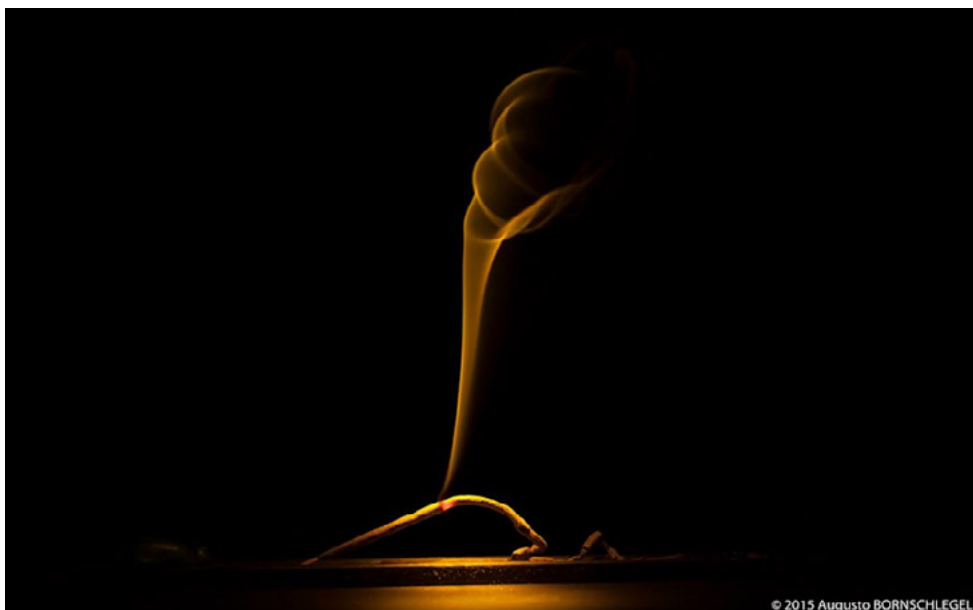
Figura 2.3 – Linhas de corrente para um plano bidimensional.



Fonte: Adaptada de ÇENGEL; CIMBALA, 2015.

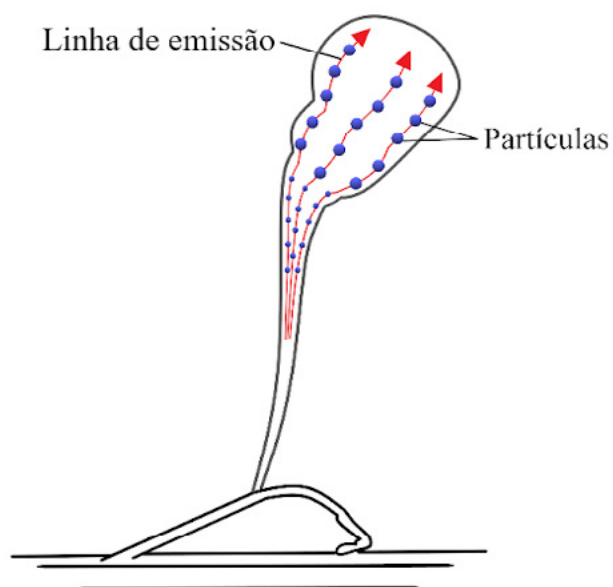
Linha de emissão: é o padrão de escoamento que se forma quando todas as partículas do fluido passam por determinado ponto em um dado instante de tempo t . A fumaça do incenso da Figura 2.4 serve de exemplo para visualizar as linhas de emissão. Nela observamos que, para um dado instante de tempo, as partículas foram emitidas pelo incenso.

Figura 2.4 – Incenso queimando e emitindo fumaça.



Fonte: BORNSCHLEGELL, 2015.

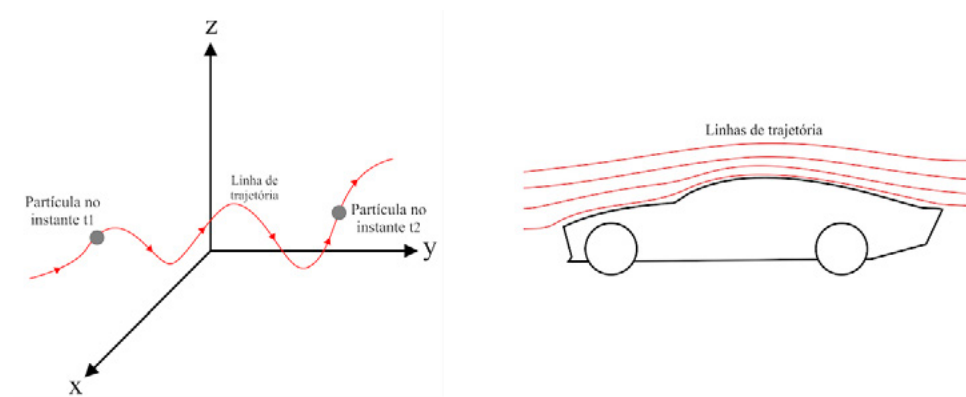
Figura 2.5 – Linhas de emissão formadas por partículas de fumaça saindo de um incenso.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Linha de trajetória: é o padrão de escoamento que se forma quando seguimos o caminho de uma partícula de fluido (abordagem lagrangiana) à medida que ela se movimenta ao longo do campo de escoamento, conforme apresentado na Figura 2.6.

Figura 2.6 – Linha de trajetória formada pelo movimento de uma partícula de fluido ao longo do escoamento.

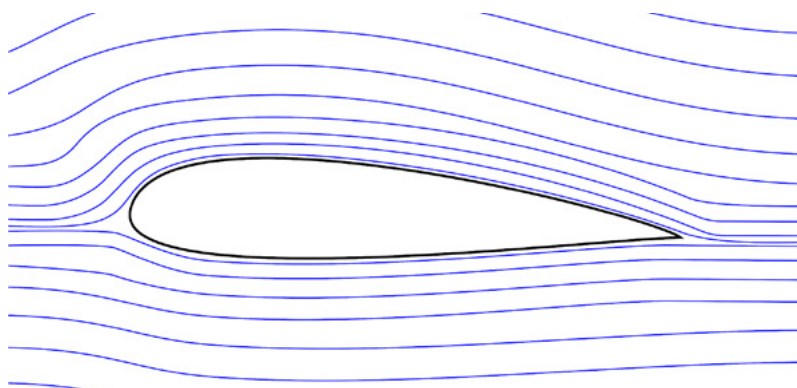


Fonte: Elaborada pelos autores.

Perceba, na Figura 2.6, que, ao longo do intervalo de tempo $t_2 - t_1$ (Δt), a linha de trajetória mostra o caminho percorrido por uma partícula de fluido.

Em escoamentos em regime permanente, linhas de trajetória, linhas de emissão e linhas de corrente são idênticas (ÇENGEL; CIMBALA, 2015), conforme exemplo da Figura 2.7.

Figura 2.7 – Linhas de corrente, de emissão e de trajetória em escoamento permanente.

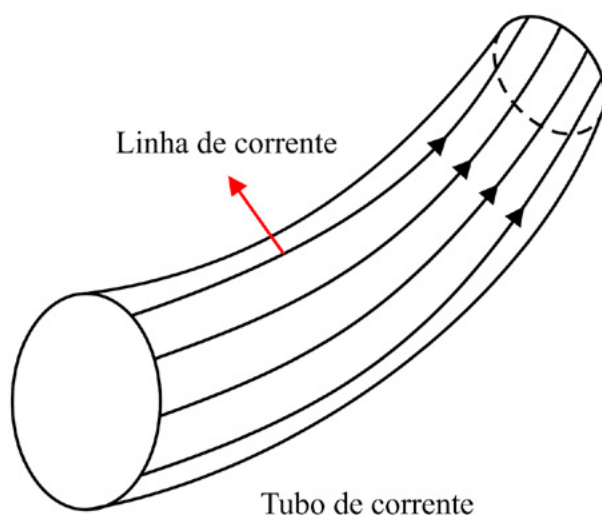


Fonte: Adaptada de ÇENGEL; CIMBALA, 2015.

Embora esses três padrões de escoamento sejam idênticos no escoamento permanente, eles podem ser diferentes no escoamento não permanente, sendo que a principal diferença é o fato de uma linha de corrente representar um padrão de escoamento instantâneo, em determinado instante de tempo, enquanto as linhas de emissão e as linhas de trajetória têm um histórico de tempo associado a elas (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

Estendendo o conceito para o domínio tridimensional, temos a definição de tubo de corrente, que é um conjunto de linhas de corrente paralelas em todos os pontos da velocidade local no qual, por definição, o fluido não pode cruzar uma linha de corrente, conforme a Figura 2.8.

Figura 2.8 – Tubo de corrente.



Fonte: Adaptada de ÇENGEL; CIMBALA, 2015.

2.3 Volume de controle e sistema

Antes de introduzir o Teorema de Transporte de Reynolds, devemos entender os conceitos de volume de controle e de sistema.

Conforme visto no Capítulo 1, um volume de controle é um volume arbitrário no espaço através do qual escoam fluidos. Esse volume pode ser considerado fixo, móvel e deformável, porém, em muitos casos, considerá-lo como fixo e indeformável é suficiente (PEREIRA, 2020).

Note que um volume de controle não é o fluido em si, mas apenas uma região do espaço por onde o fluido passa. Além disso, temos que, em um volume de controle arbitrário, podem entrar e sair quantidades diferentes de fluido e os vetores velocidades não são necessariamente iguais. Já o sistema, também chamado de sistema fechado, pode ser entendido como o fluido total a ser analisado, ou seja, uma massa de identidade fixa é escolhida (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Desse modo, a massa de um sistema nunca se altera, diferentemente de um volume de controle.

2.4 Teorema de Transporte de Reynolds (TTR)

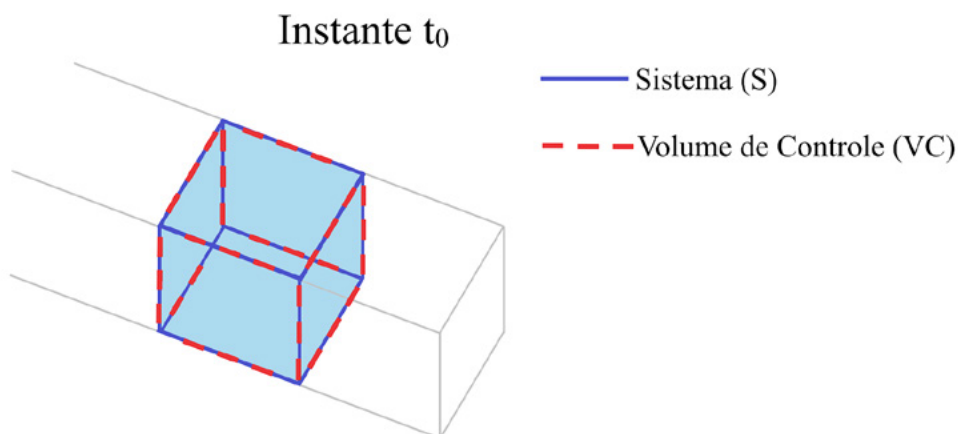
Considerando que a maioria dos princípios da Mecânica dos Fluidos, tais como o princípio da conservação de massa, o de energia e o de momento, são adotados da Mecânica dos Sólidos, onde todas as partículas estão contidas em um sistema dito fechado, e considerando que, para o estudo do movimento dos fluidos, é mais confortável trabalhar com volumes de controle (sistema aberto), notamos a necessidade de estudar as propriedades das partículas do sistema em um volume de controle, em especial as propriedades extensivas, como a massa, a energia e o momento.

Para o estudo de propriedades extensivas do volume de controle, é necessário aplicar o Teorema de Transporte de Reynolds (TTR), pois ele possibilita relacionar as taxas de variação no tempo de uma

propriedade extensiva do sistema àquelas de um volume de controle. O nome TTR é uma homenagem à Osborne Reynolds (1842-1912), engenheiro que desenvolveu o teorema a partir das visões lagrangeanas e eulerianas (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

Para entender melhor essa relação, tomemos como exemplo a Figura 2.9, na qual há uma calha condutora de água pluvial de seção retangular. Na calha, adotaremos uma seção (parcela) de fluido (em azul) para exemplificar um sistema e um volume de controle. Perceba que o sistema e o volume de controle são coincidentes, ou seja, o sistema está contido (dentro) no volume de controle e qualquer propriedade do fluido é a mesma para os dois no instante de tempo inicial t_0 .

Figura 2.9 – Sistema e volume de controle.



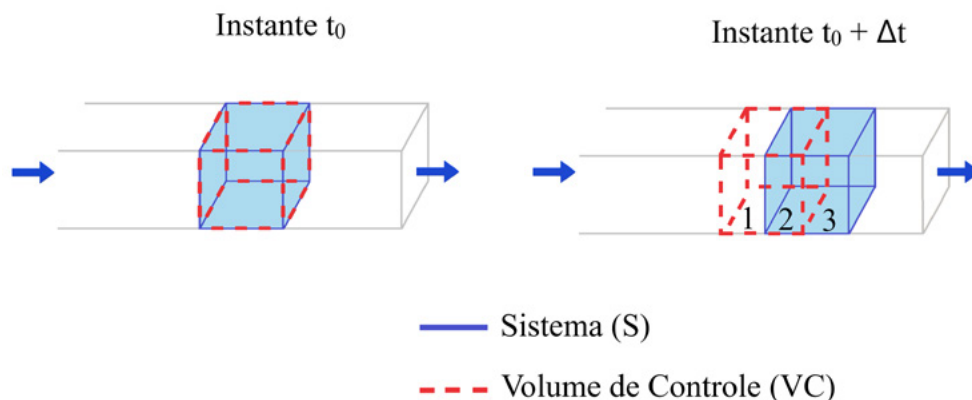
Fonte: Elaborada pelos autores.

Considerando o escoamento da esquerda para a direita em um instante de tempo após o tempo inicial, um Δt (ou seja, $t - t_0$), o sistema se desloca e o volume de controle permanece fixo.

Nesta nova configuração, conforme Figura 2.10, o volume de controle é formado pelas regiões 1 e 2 (linha tracejada em vermelho) e o sistema pelas regiões 2 e 3 (linha contínua em azul). Note que no

instante $t_0 + \Delta t$, nem todas as partículas do sistema estão dentro do volume de controle.

Figura 2.10 – Sistema móvel e volume de controle fixo.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Para simplificação da dedução do teorema, utilizaremos a geometria simples da Figura 2.9. Considere que a propriedade extensiva que se deseja estudar no volume de controle é chamada de B . Essa propriedade pode ser a quantidade de movimento, por exemplo. Considere também que a relação entre essa propriedade extensiva B e sua massa é chamada de propriedade intensiva b , ou seja, no instante de tempo t_0 , o volume de controle e o sistema coincidem (Figura 2.10 da esquerda). Desse modo, concluímos que:

$$B_{s,t_0} = B_{VC,t_0} \quad (2.1)$$

Onde B_{s,t_0} é a propriedade extensiva B do sistema e B_{VC,t_0} é a propriedade extensiva B do volume de controle, ambos para o tempo t_0 .

Com a variação do tempo Δt tendendo a zero, a taxa de variação da propriedade B do sistema em relação ao tempo é igual ao limite dessa propriedade no instante $t_0 + \Delta t$ (região 2 e 3) menos o instante t_0 na região inicial, tudo isso dividido pela variação do tempo Δt . Em termos matemáticos, temos:

$$\left(\frac{dB}{dt} \right)_s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{s(t_0 + \Delta t)} - B_{s(t_0)}}{\Delta t} \right) \quad (2.2)$$

Sabendo que as propriedades das partículas do sistema, representadas na Equação 2.2 por $B_{s(t_0 + \Delta t)}$, estão contidas nas regiões 2 e 3 para o instante $t_0 + \Delta t$ (Figura 2.10, ilustração à direita), podemos reescrever na seguinte Equação 2.3:

$$\left(\frac{dB}{dt} \right)_s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{2(t_0 + \Delta t)} + B_{3(t_0 + \Delta t)} - B_{s(t_0)}}{\Delta t} \right) \quad (2.3)$$

Quando analisamos o sistema contido (dentro) no volume de controle, temos que o sistema está na região 2 (no instante $t_0 + \Delta t$), ou seja $B_{2(t_0 + \Delta t)} = B_{VC(t_0 + \Delta t)} - B_{1(t_0 + \Delta t)}$. Reescrevendo a Equação 2.3, temos a Equação 2.4:

$$\left(\frac{dB}{dt} \right)_s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{VC(t_0 + \Delta t)} - B_{1(t_0 + \Delta t)} + B_{3(t_0 + \Delta t)} - B_{s(t_0)}}{\Delta t} \right) \quad (2.4)$$

Sabendo que as propriedades das partículas B do sistema no instante t_0 são as mesmas que as partículas B do volume de controle para o instante t_0 , temos que:

$$\left(\frac{dB}{dt} \right)_s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{VC(t_0 + \Delta t)} - B_{1(t_0 + \Delta t)} + B_{3(t_0 + \Delta t)} - B_{VC(t_0)}}{\Delta t} \right) \quad (2.5)$$

Rearranjando os termos da equação, temos:

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{VC(t_0+\Delta t)} - B_{VC(t_0)} + B_{3(t_0+\Delta t)} - B_{1(t_0+\Delta t)}}{\Delta t} \right) \quad (2.6)$$

Para aplicar o limite da soma, somamos os limites:

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{VC(t_0+\Delta t)} - B_{VC(t_0)}}{\Delta t} \right) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{3(t_0+\Delta t)}}{\Delta t} \right) - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{1(t_0+\Delta t)}}{\Delta t} \right) \quad (2.7)$$

Note que, na Equação 2.7, $\left(\frac{dB}{dt}\right)_s$ representa a taxa de variação temporal da propriedade extensiva B no sistema, ou seja, uma visão lagrangeana, e o termo $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{VC(t_0+\Delta t)} - B_{VC(t_0)}}{\Delta t} \right)$ representa a taxa de variação temporal da propriedade extensiva B no volume de controle, isto é, uma visão euleriana. Matematicamente, temos:

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_s = \left(\frac{dB}{dt}\right)_{VC} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{3(t_0+\Delta t)}}{\Delta t} \right) - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{1(t_0+\Delta t)}}{\Delta t} \right) \quad (2.8)$$

Sabendo que a massa de um sistema é o produto da sua massa específica e seu volume $m = \rho V$, e que a propriedade intensiva b é dada por $b = \frac{B}{m}$, logo $b = \frac{B}{\rho V}$, assim temos $B = b \rho V$. Portanto, $B_{3(t_0+\Delta t)}$, presente no 2º termo após o sinal de igualdade da Equação 2.8, pode ser reescrito como:

$$B_{3(t_0+\Delta t)} = (b \rho V)_{3(t_0+\Delta t)} \quad (2.9)$$

Ademais, considerando que o volume V pode ser obtido pelo produto entre o deslocamento do sistema e a área $V = rA$ e, como o deslocamento r é obtido por meio do produto da velocidade e a variação do



tempo $t = t_0 + \Delta t$, podemos reescrever o volume como $\mathcal{V} = \Delta t V A$. Assim, a Equação 2.9 fica:

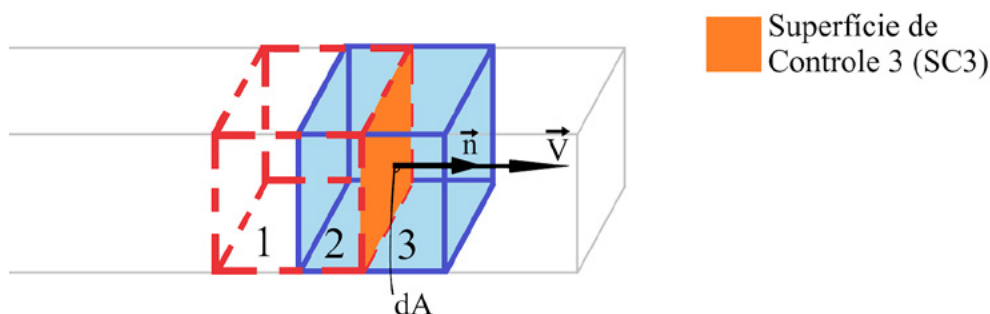
$$B_{3(t_0+\Delta t)} = (b \rho \mathcal{V})_{3(t_0+\Delta t)} = (b \rho \Delta t V A)_{3(t_0+\Delta t)} \quad (2.10)$$

Desenvolvendo o limite do 2º termo após o sinal de igualdade da Equação 2.8, temos que:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{3(t_0+\Delta t)}}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{(b \rho \Delta t V A)_{3(t_0+\Delta t)}}{\Delta t} \right) = (b \rho V A)_3 \quad (2.11)$$

Considere o escoamento de massa através de um elemento de área dA na superfície da região 3, que faz fronteira com o volume de controle, como mostra a Figura 2.11.

Figura 2.11 – Escoamento de massa através de um diferencial de área na superfície da região 3, que faz fronteira com o volume de controle.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Uma área de superfície tem magnitude e orientação e, portanto, deve ser tratada como um vetor (KUNDU; COHEN, 2008). Sendo que a orientação da superfície foi especificada pela direção de um vetor

unitário $\vec{n}$ normal a ela e dA é a magnitude de um elemento dessa superfície. Assim, o vetor área de superfície será escrito como $\vec{n}dA$.

O vetor $\vec{V}$ representa a velocidade absoluta naquele elemento de área. Sabendo que a vazão de uma propriedade b através de dA é $b\rho\vec{V} \cdot \vec{n}dA$, já que o produto escalar $\vec{V} \cdot \vec{n}$ fornece a componente normal da velocidade (ÇENGEL; CIMBALA, 2015), a vazão total através de toda a superfície de controle 3 (SC3) será obtida por integração.

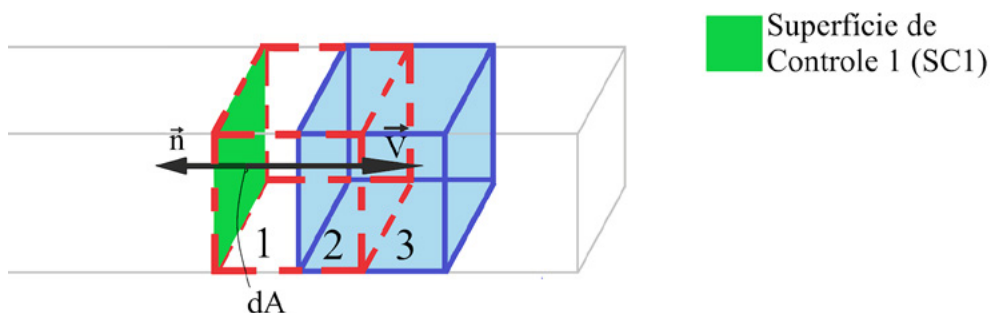
$$\int_{SC3} b\rho\vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (2.12)$$

De modo análogo, para o 3º termo após o sinal de igualdade da Equação 2.8, temos:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{1(t_0 + \Delta t)}}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{(b \rho \Delta t V A)_{1(t_0 + \Delta t)}}{\Delta t} \right) = (b \rho V A)_1 \quad (2.13)$$

Considere o escoamento de massa através de um elemento de área dA na superfície da região 1, que faz fronteira com o volume de controle, como mostra a Figura 2.12.

Figura 2.12 – Escoamento de massa através de um diferencial de área da superfície da região 1, que faz fronteira com o volume de controle.



Fonte: Elaborada pelos autores.

A vazão total através de toda superfície de controle 1 (SC1) será obtida por integração.

$$- \int_{SC1} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (2.14)$$

Na Equação 2.14, o sinal de negativo vem do fato que o vetor normal unitário $\vec{n}$ exterior a dA para o fluxo que entra é no sentido contrário do escoamento, tornando o cosseno do ângulo θ maior que 90° e posteriormente com valor negativo. Logo, o produto escalar também se torna negativo, como podemos observar na Figura 2.12.

Assim, a Equação 2.8 pode ser reescrita como:

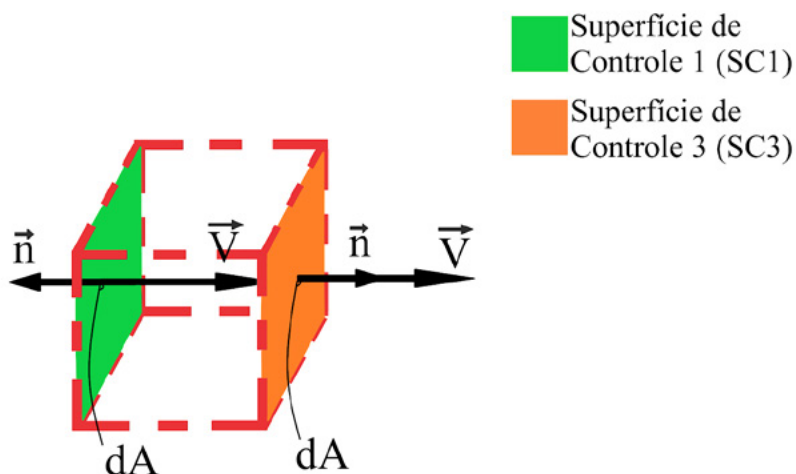
$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_s = \left(\frac{dB}{dt}\right)_{vc} + \left(\int_{SC3} b \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA\right) - \left(-\int_{SC1} b \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA\right) \quad (2.15)$$

No volume de controle, o fluido atravessa apenas as superfícies de controle 1 e 3, pois, nas outras superfícies, tem-se a parede da calha para impedir o escoamento. Assim, a superfície de controle 3 representa o fluxo da propriedade B , que sai do volume de controle, e a superfície de controle 1 representa o fluxo que entra no volume de controle. Somando o fluxo que entra e o que sai, obtemos o fluxo por toda superfície de controle SC.

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_s = \left(\frac{dB}{dt}\right)_{vc} + \int_{sc} b \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (2.16)$$

A Figura 2.13 ilustra o escoamento de entrada e saída do fluido através da superfície de controle.

Figura 2.13 – Escoamento de entrada e saída de massa através da superfície de controle SC.



Fonte: Elaborada pelos autores.

A Equação 2.16 mostra que a taxa de variação temporal da propriedade B do sistema é igual à taxa de variação da propriedade B no volume de controle mais o fluxo da propriedade B (o fluxo que entra mais o que sai), sendo que esse fluxo pode ser representado por $\dot{B}_e$ (fluxo que entra) e $\dot{B}_s$ (fluxo que sai).

Assim, temos:

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_s = \left(\frac{dB}{dt}\right)_{vc} - \dot{B}_e + \dot{B}_s \quad (2.17)$$

O ponto sobre a propriedade extensiva B da Equação 2.17 é uma notação newtoniana utilizada para “indicar a taxa de variação no tempo” (ÇENGEL; CIMBALA, 2015, p. 187).

Percebemos que a Equação 2.17 foi deduzida por meio das aplicações de significativas simplificações, a começar pelo volume de controle, que tem um formato bem definido e de fácil análise. Além

disso, a velocidade do escoamento é uniforme e normal nas superfícies das seções analisadas (superfícies SC1 e SC3).

Devemos ressaltar que a propriedade B analisada pode não ter uma distribuição uniforme no volume de controle. Logo, a grandeza B_{vc} deve ser escrita de forma mais genérica como a seguinte integral:

$$B_{vc} = \int_{vc} \rho b \, d\mathcal{V} \quad (2.18)$$

Substituindo a Equação 2.18 na Equação 2.16, obtemos o Teorema de Transporte de Reynolds para um volume de controle fixo.

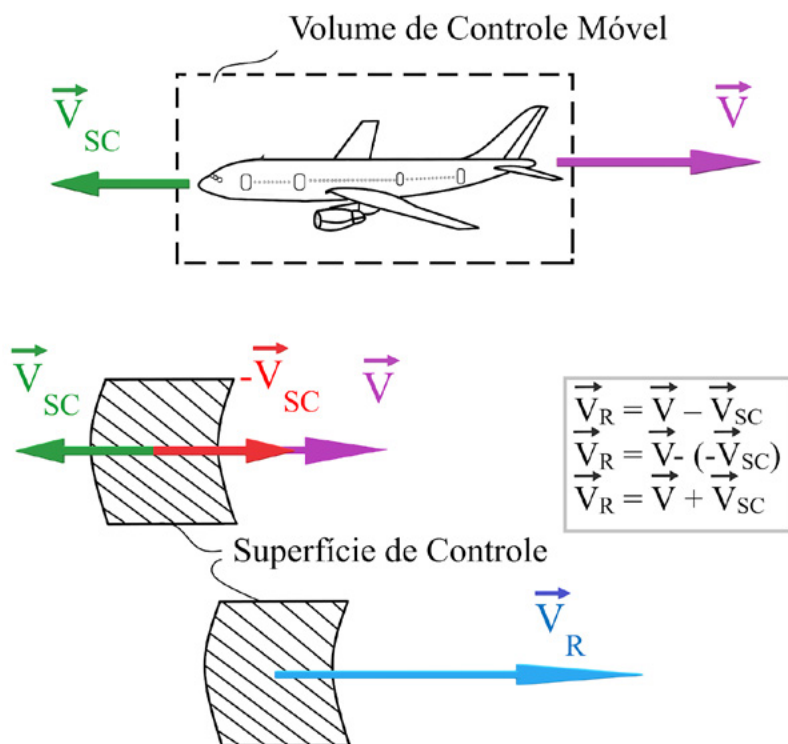
$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_s = \frac{d}{dt} \int_{vc} \rho b \, d\mathcal{V} + \int_{sc} b \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA \quad (2.19)$$

Caso o volume de controle seja móvel e/ou deformante, será preciso substituir a velocidade absoluta $\vec{V}$ (velocidade do fluido em relação a um ponto fixo) pela velocidade relativa $\vec{V}_R$ (velocidade do fluido em relação à superfície de controle) (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Na Figura 2.14, temos um exemplo de volume de controle móvel ao redor de um avião, sendo $\vec{V}_{sc}$ a velocidade da superfície de controle e $\vec{V}$ a velocidade absoluta dos gases de exaustão que saem do bocal.

Sabendo que a velocidade relativa através de uma superfície de controle é encontrada pela adição vetorial da velocidade absoluta do fluido com o oposto da velocidade local da superfície de controle (ÇENGEL; CIMBALA, 2015), temos que $\vec{V}_R = \vec{V} - \vec{V}_{sc}$. É possível perceber que, quando o volume de controle é fixo, a velocidade da superfície é nula, logo $\vec{V}_R = \vec{V}$. Assim, o Teorema de Transporte de Reynolds para um volume de controle fixo, móvel e/ou deformante será expresso por:

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_S = \frac{d}{dt} \int_{V_C} \rho b \, dV + \int_{S_C} b \rho \vec{V}_R \cdot \vec{n} \, dA \quad (2.20)$$

Figura 2.14 – Volume de controle móvel ao redor de um avião se movendo à velocidade constante.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Referências

ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. **Mecânica dos fluidos**: fundamentos e aplicações. 3. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2015.

BORNSCHLEGELL, A. S. **Incenso queimando e emitindo fumaça**. 2015. 1 fotografia

FLOW ILLUSTRATOR. **Lagrangian and eulerian viewpoints**. [S. l.]: Flow Illustrator, [20--]. Disponível em: <http://www.flowillustrator.com/fluid-dynamics/basics/lagrangian-eulerian-viewpoints.php>. Acesso em: 10 ago. 2019.

HELERBROCK, R. Leis de Newton. **Brasil Escola**, Goiânia, [20--]. Disponível em: <https://brasilestola.uol.com.br/fisica/leis-newton.htm>. Acesso em: 25 maio 2020.

KUNDU, P. K.; COHEN, I. M. **Fluid mechanics**. 4. ed. Burlington: Elsevier Inc., 2008.

MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. **Fundamentos da mecânica dos fluidos**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2004.

PEREIRA, J. T. V. **Apostila de termodinâmica I**. Campinas: UNICAMP, 2020. Capítulo 4: Volume de controle – Análise energética. Disponível em: <http://www.fem.unicamp.br/~em313/paginas/textos/apostila4.htm#l>. Acesso em: 11 maio 2020.

SANTOS, A. F. M. dos. **Modelagem lagrangiana e simulações de sistemas mecânicos constituídos por massa-mola e pêndulos**. 2018. 79 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2018. Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/296899056.pdf>. Acesso em: 5 abr. 2020.

VEGINI, A. A. **Modelagem multifásica Euleriana-Euleriana pra simulação numérica de ciclones**. 2007. 128 f. Tese (Doutorados em Engenharia Química) – Faculdade de Engenharia Química, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/403639?guid=1645398579060&returnUrl=%2fresultado%2flistar%3fguid%3d1645398579060%26quantidadePaginas%3d1%26codigoRegistro%3d403639%23403639&i=>. Acesso em: 16 abr. 2020.

CONSERVAÇÃO DA MASSA

Neste capítulo, precisamos ter em mente que tanto a massa quanto a energia são propriedades extensivas e não podem ser criadas ou destruídas durante um processo (ÇENGEL; CIMBALA, 2015), e que a massa e a energia podem ser convertidas entre si por meio da equação proposta por Albert Einstein (1879-1955), pela qual determinada energia é igual ao produto da massa pela velocidade da luz ao quadrado $E=mc^2$. A equação de Einstein sugere que a massa de um sistema é diretamente proporcional à sua energia, portanto, entendemos que a massa varia assim como varia a energia. Na prática, para todas as interações de energia, com exceção das reações nucleares, a variação da massa é muito pequena e costuma ser desprezada (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

3.1 Conservação da massa: análise com volume de controle finito

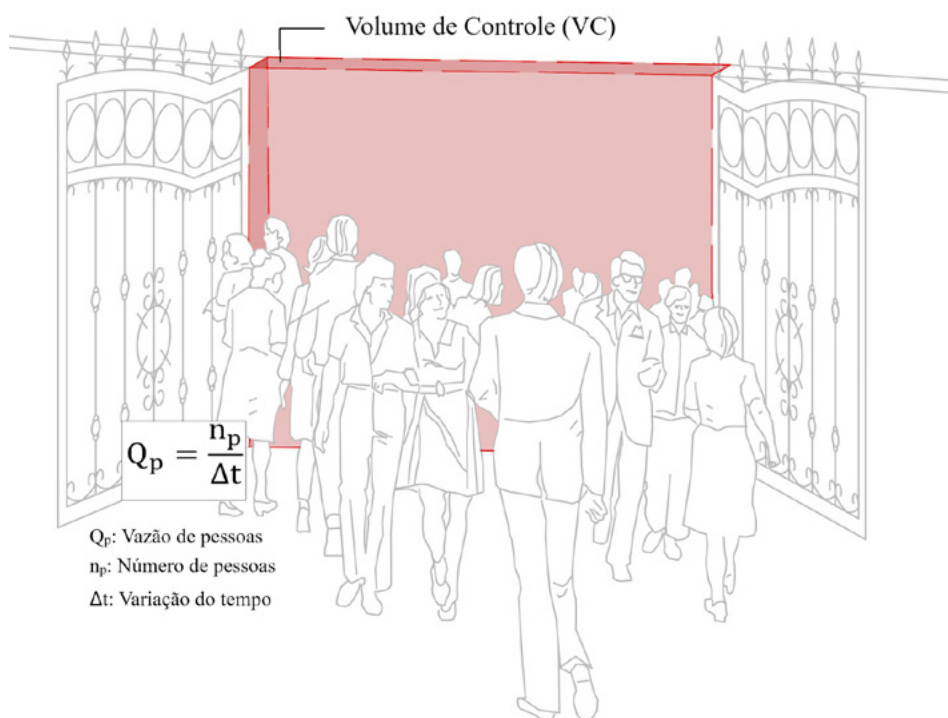
Para Connor (2019), em um sistema fechado, a massa total não se altera com o tempo, ou seja, $\left(\frac{dm}{dt}\right)_s = 0$. Percebemos que essa relação considera um caso especial de nenhuma massa cruzar a superfície de controle e é válida independentemente do fato de o volume de controle ser fixo, móvel ou deformável. Contudo, para um volume de controle em que a massa pode cruzar fronteiras, a taxa de variação da massa em função do tempo dentro do volume de controle é dada pela

diferença entre a quantidade de massa que entra ($\dot{m}_e$) e a quantidade de massa que sai ($\dot{m}_s$) do volume de controle em um determinado espaço de tempo. Esse conceito será abordado com mais profundidade no decorrer deste capítulo.

Na representação da variação temporal da massa, há um ponto sobre a letra m devido ao chamado método dos fluxões (*fluxions*) criado por Isaac Newton para exprimir as relações entre as grandezas relevantes da mecânica, que trata de derivadas em relação ao tempo (FRANCO, 2002). O fluxo de massa de um volume de controle pode ser determinado pela medida da quantidade de massa que o atravessa em determinado intervalo de tempo, ou seja, a partir da medição de sua vazão.

Imagine que hoje é o dia do vestibular. O portão do local onde será aplicada a prova pode ser considerado como a entrada de um volume de controle e podemos determinar a vazão de pessoas que atravessam o portão durante um intervalo Δt dividindo a quantidade total de pessoas que passaram pelo portão pelo intervalo de tempo Δt , conforme a Figura 3.1. Em muitas situações, desejamos quantificar a passagem de fluido através de uma superfície (COELHO, 2016). Assim, com esse intuito, segundo Elger *et al.* (2019), os engenheiros caracterizam a vazão usando os conceitos de vazão em massa e vazão em volume, que serão definidos a seguir.

Figura 3.1 – Um portão destacado como volume de controle para o estudo do conceito de vazão.



Fonte: Elaborada pelos autores.

3.2 Vazão em massa

A vazão em massa, também chamada de vazão mássica, é definida como a quantidade de massa que escoar através de uma seção transversal por unidade de tempo (ÇENGEL; CIMBALA, 2015), denotada neste texto por $\dot{m}$. Matematicamente, temos:

$$\dot{m} = \frac{m}{\Delta t} = \frac{\rho V}{\Delta t} \quad (3.1)$$

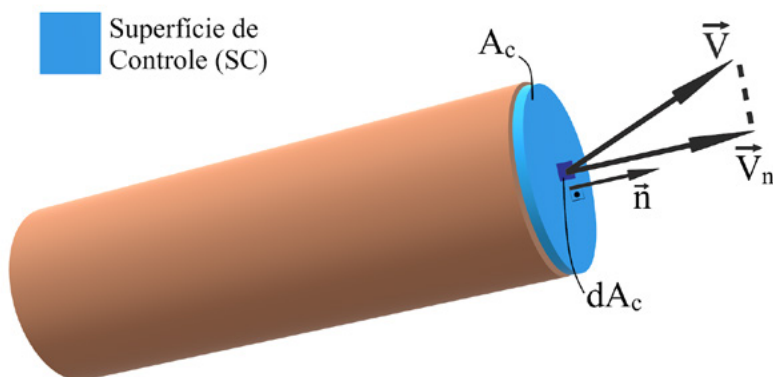
Onde m é a massa (kg, no sistema internacional de unidade de medidas) representada pelo produto da massa específica do fluido (kg/m^3) e seu volume (m^3) em função de um intervalo de tempo t (s).

Para tornar mais prático o conceito de vazão em massa, considere um fluido escoando ao longo de um duto ou tubulação. A vazão que escoar através de toda a seção transversal do tubo é dada por:

$$\dot{m} = \int_{A_c} \delta \dot{m} = \int_{A_c} \rho V_n dA_c \quad (\text{kg/s}) \quad (3.2)$$

Onde δ e d representam quantidades diferenciais e a vazão em massa é proporcional à área da seção do tubo A_c , à massa específica do fluido ρ e à velocidade normal V_n , sendo que a velocidade dita normal para uma superfície é a componente da velocidade perpendicular à superfície, ou seja, a projeção do vetor velocidade sobre o vetor unitário perpendicular à superfície, conforme a Figura 3.2.

Figura 3.2 – Velocidade normal.



Fonte: Elaborada pelos autores.

A diferença entre as notações é que δ é utilizado para representar quantidades, como a quantidade de transferência de massa,

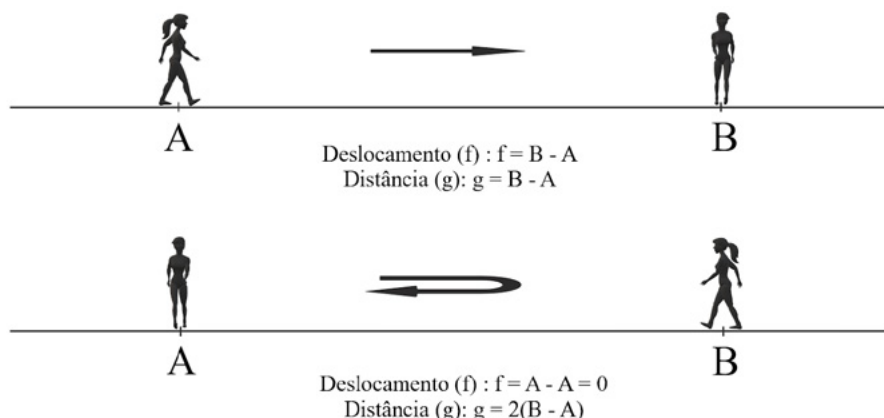
a qual é uma função de caminho que possui diferenciais inexatas, e d representa as quantidades, como as propriedades que são funções pontuais e têm diferenciais exatas.

Para Çengel e Cimbala (2015), a diferencial exata ou total d é a aplicação da diferencial a uma função pontual, em outras palavras, uma diferencial exata independe do caminho considerado.

Outrossim, conforme Çengel e Cimbala (2015), a diferencial inexata δ é a aplicação da diferencial a uma função de linha, ou seja, uma diferencial inexata depende do caminho considerado.

Para exemplificar um caso de deslocamento versus distância percorrida, observe a Figura 3.3 e considere uma pessoa que caminha em linha reta de um ponto A até um ponto B , ou seja, num deslocamento $f = B - A$ com valor igual à distância percorrida. Se, após a pessoa chegar ao ponto B , decidir retornar ao ponto A , temos um deslocamento $f = A - A = 0$ e uma distância percorrida $g = 2(B - A)$. A diferencial do deslocamento é dada pela forma exata (d) $f = dx$, na qual $f = x_B - x_A$. Por outro lado, a diferencial da distância percorrida é dada pela forma inexata $\delta g = \frac{|dx|}{dx} dx$ e, portanto, nem sempre $\Delta g = x_B - x_A$ irá fornecer a distância percorrida, pois ela depende do trajeto considerado.

Figura 3.3 – Exemplo de uma pessoa que se desloca entre um ponto A e um ponto B e a diferença entre deslocamento e distância.



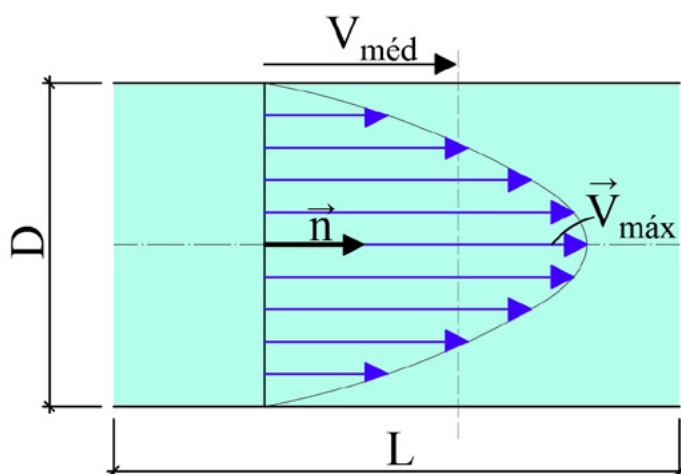
Fonte: Elaborada pelos autores.

A Equação 3.2 é sempre exata, porém pouco útil para aplicações práticas. Uma abordagem mais interessante, sob o ponto de vista da engenharia, seria expressar as taxas do escoamento de massa em termos de valores médios sobre a seção transversal do tubo, ou seja, substituir V_n pela velocidade média V_{med} na seção. Além disso, podemos considerar a massa específica ρ constante ao longo do tubo, tendo em vista que em muitas aplicações práticas a massa específica é essencialmente uniforme ao longo da seção transversal do tubo (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

Tratando-se de massa específica constante, considerando que ρ permanece aproximadamente constante em todos os lugares onde ocorre o escoamento, ou seja, o escoamento é dito incompressível, podemos colocar a massa específica para fora da integral da Equação 3.2.

Com relação à substituição da velocidade normal (V_n) para a velocidade média, devemos considerar que os vetores velocidades de um fluido em movimento dentro de uma tubulação, por exemplo, nunca são uniformes devido à condição de não escorregamento na parede da tubulação. Essa condição faz com que os vetores velocidade variem de zero (nas paredes da tubulação) até um valor máximo (no centro da tubulação) criando, para um escoamento laminar completamente desenvolvido, um perfil parabólico de velocidade, conforme a Figura 3.4.

Figura 3.4 – Perfil parabólico de velocidade devido à condição de não escorregamento.



Fonte: Adaptada de ÇENGEL; CIMBALA, 2015.

A condição de não escorregamento é estabelecida quando as partículas de fluido que entram em contato com a parede da tubulação assumem a velocidade da própria parede, que é nula. Basicamente, é um requisito de que, na interface entre um fluido e uma superfície sólida — nesse caso, a parede da tubulação —, a velocidade do fluido e a velocidade da superfície sejam iguais. Como a superfície é fixa, o fluido deve obedecer à condição do contorno e possuir velocidade nula na superfície (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Assim, conforme as partículas se distanciam da parede, sofrem menos a sua influência e assumem velocidades maiores até chegar à velocidade máxima, que ocorre no centro do tubo.

Considerando que o fluido é incompressível e está em estado estacionário, ou seja, a propriedade velocidade em um ponto fixado não varia com o tempo (ÇENGEL; CIMBALA, 2015), definimos a velocidade média ($V_{\text{méd}}$) como a média ponderada das velocidades normais em relação à área da seção. Desse modo, temos que:

$$V_{méd} = \frac{1}{A_c} \int_{A_c} V_n dA_c \quad (3.3)$$

Consideremos novamente a Equação 3.2. Se a velocidade V_n for substituída por $V_{méd}$ ao longo da seção transversal, o valor de $\dot{m}$ não se altera. Com base nisso, e supondo que ρ é aproximadamente uniforme ao longo da seção transversal, podemos reescrever a Equação 3.2 do seguinte modo:

$$\dot{m} = \rho V_{méd} A_c \text{ (kg/s)} \quad (3.4)$$

Em que $V_{méd}$ indica a velocidade média na direção do escoamento e A_c indica a área da seção normal à direção do escoamento.

3.3 Vazão em volume

De forma análoga ao que foi exposto para a vazão em massa, definimos a vazão em volume, também chamada de vazão volumétrica, observando o volume de fluido que escoar através de uma seção transversal por unidade de tempo (ÇENGEL; CIMBALA, 2015), ou seja:

$$\dot{V} = \int_{A_c} V_n dA_c = V_{méd} A_c \quad (\text{m}^3/\text{s}) \quad (3.5)$$

Muitos livros sobre a Mecânica dos Fluidos utilizam a letra Q para representar a vazão em volume. Contudo, para que não se confunda o símbolo usado para representar a vazão em volume com aquele utilizado para denominar transferência de calor Q , ou com o símbolo usado para definir o momento linear $\bar{Q}$, vamos adotar $\dot{V}$ para representar a vazão em volume.



A vazão em massa e a vazão em volume podem ser relacionadas entre si combinando as equações 3.4 e 3.5. Assim, obtemos:

$$\dot{m} = \rho \dot{V} \quad (3.6)$$

Para visualizar melhor como as equações foram combinadas, perceba que se $\dot{m} = \rho V_{méd} A_c$ e $\dot{V} = V_{méd} A_c$, logo $\dot{m} = \rho \dot{V}$.

3.4 Princípio de conservação de massa

O princípio de conservação de massa para um volume de controle afirma que a diferença entre a massa total que entra no volume de controle m_e e a massa total que sai do volume de controle m_s , durante um intervalo de tempo Δt , é igual à variação dessa massa dentro do volume de controle Δm_{vc} nesse mesmo intervalo de tempo Δt , ou seja:

$$m_e - m_s = \Delta m_{vc} \quad (kg) \quad (3.7)$$

A Equação 3.7 pode ser expressa em termos de taxa de variação como:

$$\dot{m}_e - \dot{m}_s = \left(\frac{dm}{dt} \right)_{vc} \quad (kg/s) \quad (3.8)$$

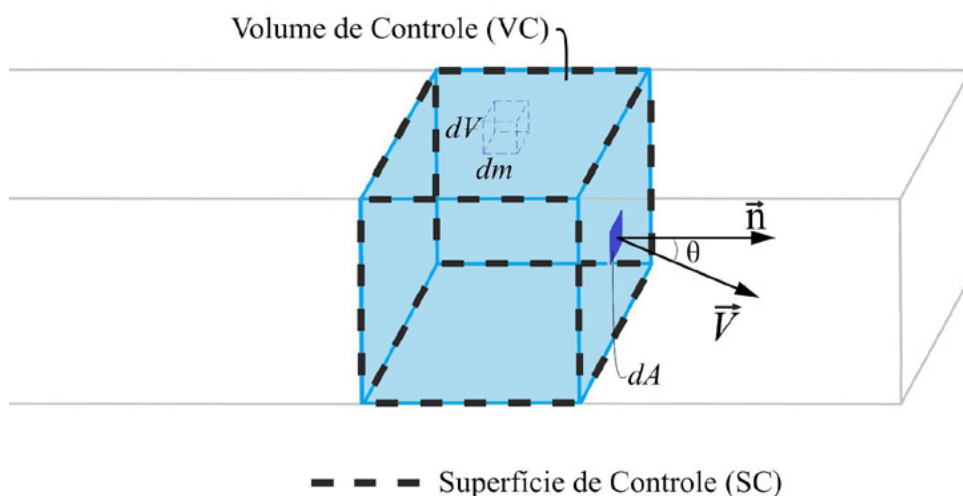
Onde $\dot{m}_e$ e $\dot{m}_s$ são as vazões totais de massa para dentro e para fora do volume de controle, e $\left(\frac{dm}{dt} \right)_{vc}$ é a taxa de variação no tempo de massa dentro das fronteiras do volume de controle. Tanto a Equação 3.7 quanto a Equação 3.8 são chamadas de balanço de massa e se aplicam a qualquer volume de controle passando por um processo qualquer.



A expressão geral da conservação de massa para um volume de controle fixo afirma que “a taxa de variação no tempo da massa dentro do volume de controle mais a vazão total de massa através da superfície de controle é igual a zero” (ÇENGEL; CIMBALA, 2015, p. 190). Essa expressão pode ser obtida por meio de manipulação matemática dos conceitos apresentados, em termos de massa diferencial e total e por meio do TTR, no capítulo 2.

Em termos de manipulação matemática dos conceitos já apresentados, explicaremos a partir do seguinte exemplo: considere um volume de controle arbitrário como o mostrado pela Figura 3.5.

Figura 3.5 – Volume de controle arbitrário.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Considerando um volume diferencial dV dentro do volume de controle, com massa específica $\rho = dm/dV$, a massa total dentro do volume de controle é dada pela soma de todas as massas infinitesimais, resultando na seguinte integral:

$$m_{VC} = \int_{VC} \rho dV \quad (3.9)$$

Ao derivar a Equação 3.9, temos que a taxa de variação de massa dentro do volume de controle será:

$$\frac{dm_{VC}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV \quad (3.10)$$

Quando o volume de controle é um sistema fechado, ou seja, quando nenhuma massa cruza a superfície de controle, de acordo com Çengel e Cimbala (2015), podemos expressar o princípio de conservação de massa como $\left(\frac{dm}{dt}\right)_{vc} = 0$.

Contudo, quando há uma quantidade de massa entrando e saindo pela superfície de controle, precisamos levar esse fato em consideração. Para exemplificar, observe a Figura 3.5, na qual um fluido escoou pela superfície de uma área diferencial dA de um volume de controle fixo. O vetor unitário $\vec{n}$ está orientado na direção exterior em dA e normal a ela, e V representa a velocidade do escoamento em dA em relação a um sistema de coordenadas fixo. Além disso, θ é o ângulo entre o vetor velocidade e o vetor unitário, sendo que a vazão mássica é proporcional à componente normal da velocidade. Como o produto escalar entre dois vetores não nulos é igual ao produto entre seus módulos e o cosseno do ângulo formado entre eles (WINTERLE, 2014), a velocidade normal, em notação de produto escalar, será dada por:

$$V_n = V \cos \theta = \vec{V} \cdot \vec{n} \quad (3.11)$$

Quando $\theta = 0^\circ$, o escoamento é perpendicular à superfície e possui uma vazão máxima com sentido para fora da superfície. Se $\theta = 90^\circ$, o escoamento está paralelo à superfície e a vazão de massa que pas-

sa por ela é nula. Quando $\theta = 180^\circ$, o escoamento é máximo e normal à superfície, mas com sentido entrando (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

Como a vazão de massa através de uma superfície dA é proporcional à massa específica do fluido ρ , à velocidade normal V_n e à própria área de escoamento dA (ÇENGEL; CIMBALA, 2015), podemos expressar uma vazão diferencial que passa por dA como:

$$\delta \dot{m} = \rho V_n dA = \rho (V \cos \theta) dA = \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad (3.12)$$

Para obter a vazão de massa líquida para dentro ou para fora do volume de controle através de toda a superfície de controle, vamos integrar a Equação 3.12 sobre toda a superfície de controle:

$$\dot{m}_{total} = \int_{SC} \delta \dot{m} = \int_{SC} \rho V_n dA = \int_{SC} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad (3.13)$$

A partir das equações 3.8 e 3.10, temos que:

$$\dot{m}_e - \dot{m}_s = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV \quad (3.14)$$

Reorganizando os termos, temos que:

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV + \dot{m}_s - \dot{m}_e = 0 \quad (3.15)$$

E a partir das equações 3.13 e 3.15, obtemos a conservação geral de massa:

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = 0 \quad (3.16)$$



No capítulo 2, o Teorema de Transporte de Reynolds para uma propriedade extensiva B e sua propriedade intensiva b correspondente, em um sistema de coordenadas fixo, foi expresso como:

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_S = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b \, dV + \int_{SC} b \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA.$$

Considerando a propriedade B como a massa m e a propriedade b como 1, já que a massa dividida por ela mesma resulta em 1, e tendo em vista que a massa de um sistema é constante, ou seja, a sua derivada em relação ao tempo resulta em zero, temos que:

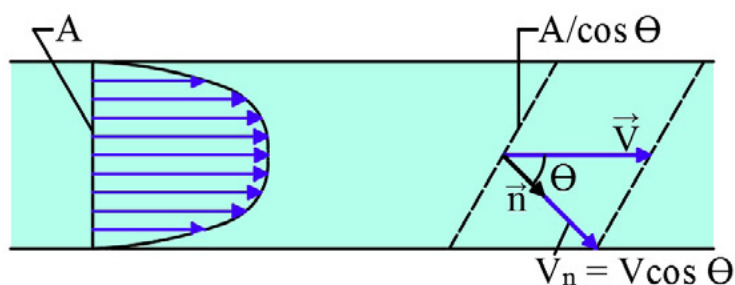
$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_S = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \, dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA = 0 \quad (3.17)$$

Observe que a Equação 3.16 e a Equação 3.17, obtidas por meio de manipulação matemática e pelo TTR, respectivamente, são equivalentes. Se dividirmos a integral de superfície da Equação 3.17 em duas partes, uma para o escoamento de saída (positivo) e outra para o escoamento de entrada (negativo), e considerando o caso de mais de uma entrada e saída, a relação geral para a conservação de massa será expressa como:

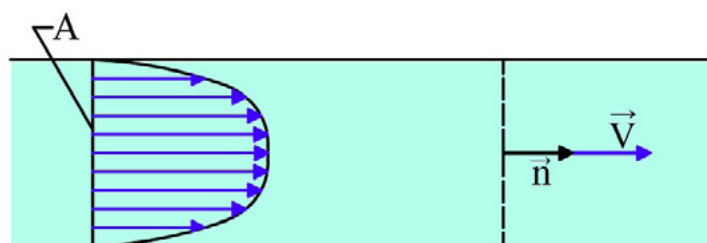
$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \, dV + \sum_s \rho |V_n| A - \sum_e \rho |V_n| A = 0 \quad (3.18)$$

Ao escolhermos um volume de controle, é mais vantajoso tornar a superfície de controle normal ao escoamento, pois, dessa forma, o produto escalar $\vec{V} \cdot \vec{n}$ torna-se a magnitude da velocidade e a integral $\int_A \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA$ torna-se simplesmente $\rho V A$ (ÇENGEL; CIMBALA, 2015), como podemos observar na Figura 3.6.

Figura 3.6 – Superfície de controle oblíqua e normal ao escoamento, respectivamente.



$$\dot{m} = \rho(V \cos \Theta)(A / \cos \Theta) = \rho V A$$



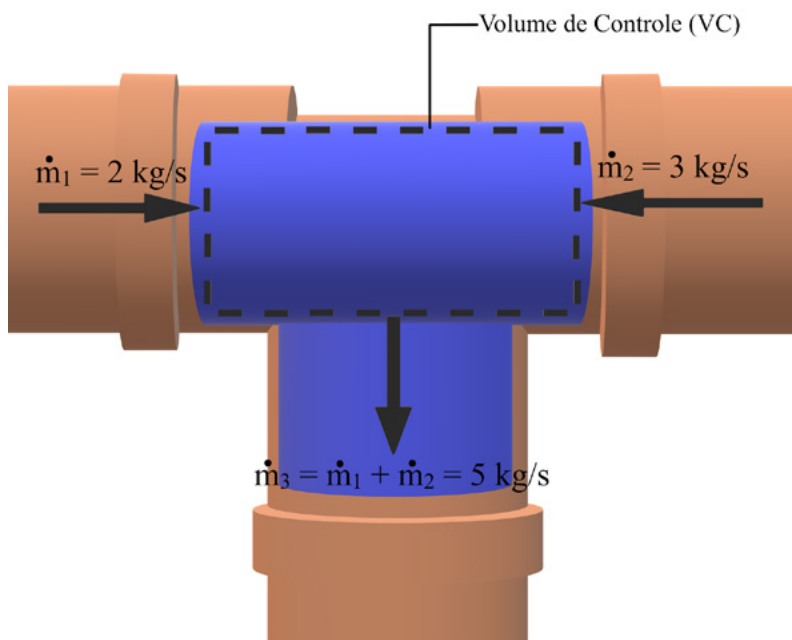
$$\dot{m} = \rho V A$$

Fonte: Adaptada de ÇENGEL; CIMBALA, 2015.

3.5 Equação da continuidade: simplificada

Pelo princípio da conservação de massa, observamos que a massa dentro do volume de controle é conservada, ou seja, não há perdas para o meio externo, o que implica que, em um volume de controle como o da Figura 3.7, a quantidade total de massa que entra é igual à quantidade total de massa que sai dele.

Figura 3.7 – O princípio da conservação de massa para um sistema de escoamento em regime permanente com duas entradas e uma saída.



Fonte: Elaborada pelos autores.

A quantidade de massa que escoa para dentro e para fora de um volume de controle nem sempre é a informação mais utilizada na análise de problemas de escoamento em regime permanente. Entretanto, a quantidade de massa que escoa por unidade de tempo, ou seja, a vazão em massa ou em volume, é uma informação relevante na análise desses problemas.

A equação da continuidade pode ser interpretada como a aplicação do conceito do princípio da conservação de massa em um volume de controle. Para torná-la prática, algumas condições simplificadoras são adotadas: a primeira delas é considerar o fluido como incompressível, dessa forma ρ passa a ser constante, o que implica que $\partial \rho / \partial t = 0$. Essa condição é amplamente aplicada, como vimos no capítulo 1, a massa específica dos líquidos é aproximadamente cons-

tante e, portanto, são considerados substâncias incompressíveis. Já os gases são altamente compressíveis, por isso, para que o escoamento de um gás seja considerado como incompressível, deve ser levado em conta o número de Mach, que é um adimensional definido pela razão entre a velocidade do escoamento V e a velocidade do som c , ou seja $Ma = V/c$. Assim, quando o número de Mach é menor que 0,3, ou seja, 30% da velocidade do som no ar, podemos desprezar os efeitos da compressibilidade do gás e aproximar sua massa específica como constante (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

Utilizando essa simplificação, podemos ter um equilíbrio de massa para escoamentos em regime permanente. Esse equilíbrio afirma que a vazão em massa que entra precisa ser igual à vazão em massa que sai, considerando um volume de controle fixo no interior de uma tubulação, por exemplo. O equacionamento desse princípio é mostrado a seguir.

$$\sum_{entra} \dot{m} = \sum_{sai} \dot{m} \quad (3.19)$$

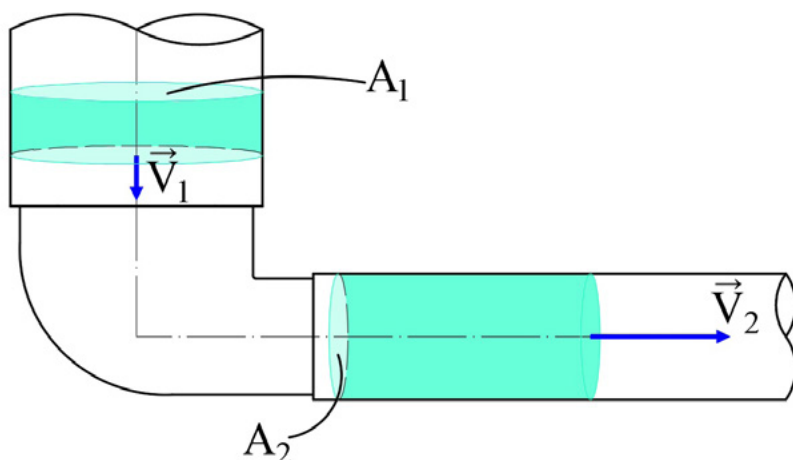
Outra simplificação que pode ser adotada é a de considerar o escoamento como uma corrente simples ocorrendo em apenas uma direção. No interior de uma tubulação, o que ocorre é: o fluido esco geralmente na direção do comprimento do tubo formando um escoamento aproximadamente unidimensional (ÇENGEL; CIMBALA, 2015), onde vale a hipótese adotada. Assim, podemos eliminar o somatório, já que a vazão ocorre em apenas uma direção e as outras parcelas são nulas.

$$\dot{m}_{entra} = \dot{m}_{sai} \quad (3.20)$$

Para exemplificar, observe a Figura 3.8, onde um conector de 90°, além de mudar a direção do escoamento, também une tubos de diferentes diâmetros, sendo a área da seção 1 maior do que a área da

seção 2. Sabemos, da Equação 3.4, que o valor da vazão em massa em determinada seção vale $\dot{m} = \rho V_{méd} A_c$.

Figura 3.8 – Conector de 90° unindo tubulações de diferentes diâmetros.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Denotando a seção de entrada como sendo a 1 e a seção de saída como sendo a 2, o equilíbrio de vazões fica:

$$\rho_1 V_{méd\ 1} A_{c1} = \rho_2 V_{méd\ 2} A_{c2} \quad (3.21)$$

Lembrando que $\rho_1 = \rho_2$, ou seja, a massa específica é considerada constante, podemos simplificá-la fazendo:

$$V_{méd\ 1} A_{c1} = V_{méd\ 2} A_{c2} \quad (3.22)$$

Essa expressão é amplamente utilizada no cálculo de velocidades de escoamento em tubulações. Ela estabelece uma relação inversamente proporcional entre a área e a velocidade, implicando que,

quanto maior a área da seção, mais lentamente o fluido se moverá para alimentar a mesma vazão, como ilustra a Figura 3.8.

Cabe salientar que a Equação 3.22 é válida somente para fluidos cuja massa específica é considerada constante, como é o caso dos líquidos. Entretanto, no caso do ar, as vazões em volume de controle, de entrada e de saída, podem ser diferentes caso o número de Mach seja maior que 0,3.

Referências

ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. **Mecânica dos fluidos**: fundamentos e aplicações. 3. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2015.

COELHO, G. C. M. **Energia e fluidos**: mecânica dos fluidos. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2016. 2 v.

CONNOR, N. O que é sistema aberto – sistema fechado – sistema isolado – definição. **Thermal Engineering**, [s. l.], 12 nov. 2019. Disponível em: <https://www.thermal-engineering.org/pt-br/o-que-e-sistema-aberto-sistema-fechado-sistema-isolado-definicao/>. Acesso em: 17 jun. 2020.

ELGER, D. F. *et al.* **Mecânica dos fluidos para engenharia**. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

FRANCO, H. Newton e o cálculo diferencial e integral. **Evolução dos Conceitos da Física**. São Paulo, 2002. Disciplina Evolução dos Conceitos da Física – FMT405, Departamento de Física Aplicada, Universidade de São Paulo. Disponível em: <http://plato.if.usp.br/1-2003/fmt0405d/apostila/renasc7/node12.html>. Acesso em: 31 maio 2020.

WINTERLE, P. **Vetores e geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2014.

CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

Este capítulo aborda conceitos relacionados à energia mecânica e apresenta a equação geral da energia e a equação de Bernoulli. A equação da energia representa o princípio da conservação de energia, e a equação de Bernoulli ou Teorema de Bernoulli trata da conservação de três formas de energia, potencial, cinética e do escoamento (pressão), bem como das conversões entre essas formas de energia na região do escoamento, onde o efeito das forças viscosas é desprezível.

A equação de Bernoulli é uma das equações mais utilizadas em Mecânica dos Fluidos e sua dedução é apresentada neste capítulo. Também apresentamos a equação de Bernoulli aplicada às máquinas, tais como bombas e turbinas, e os conceitos de potência do fluido, potência de máquinas e rendimento.

Quando o fluido se desloca em um volume de controle arbitrário, como em uma tubulação de água, parte da energia do escoamento é perdida por efeito das forças de resistência, como as forças de atrito, de modo que essa parcela de energia mecânica é dissipada na forma de energia térmica, de maneira irreversível. Portanto, os conceitos de perda de energia mecânica, ou mais comumente conhecidos como perda de carga, são apresentados neste capítulo.

4.1 A energia mecânica

De acordo com Çengel e Cimbala (2015), muitos sistemas desenvolvidos na Mecânica dos Fluidos têm o intuito de transportar um fluido de um local para outro com parâmetros de escoamento bem especificados. Assim, o sistema pode gerar trabalho mecânico, como acontece em uma turbina, ou consumir trabalho mecânico, como acontece em uma bomba durante o processo.

Tais sistemas podem ser convenientemente analisados considerando apenas as formas mecânicas de energia e os efeitos do atrito que causam a perda de energia mecânica (ÇENGEL; CIMBALA, 2015), ou seja, ocorre uma diferenciação entre energia mecânica e energia térmica. A energia mecânica é a forma de energia que pode ser convertida direta e completamente em trabalho por dispositivos ideais — como uma turbina ideal de uma hidrelétrica, apresentada na subseção 1.16.2 do capítulo 1 —, diferente da energia térmica que, de acordo com a segunda lei da termodinâmica, não pode ser convertida em trabalho (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

Uma bomba transfere a energia mecânica para um fluido elevando sua pressão e uma turbina extrai a energia mecânica de um fluido fazendo sua pressão cair (ÇENGEL; CIMBALA, 2015), logo, a pressão está ligada à energia mecânica. Entretanto, a pressão não é uma forma de energia, pois, pela análise de sua unidade, temos $\frac{N}{m^2} = \frac{N \cdot m}{m^2 \cdot m} = \frac{J}{m^3}$, ou seja, a pressão pode ser dada pela razão entre uma unidade de energia J e uma unidade de volume m^3 . Ainda assim, uma força de pressão agindo sobre um fluido em uma determinada distância produz trabalho, chamado de trabalho do escoamento, na quantidade de $\frac{P}{\rho}$ por unidade de massa (ÇENGEL; CIMBALA, 2015), sendo isto verificado facilmente, ou seja, $\frac{N/m^2}{kg/m^3} = \frac{J}{kg}$. É proveitoso adicionar essa quantidade na equação da energia mecânica e chamá-la de energia do escoamento, resultando na fórmula da energia mecânica de um fluido em escoamento permanente, que será dada pela Equação 4.1.

$$e_{mec} = \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g z \quad (4.1)$$

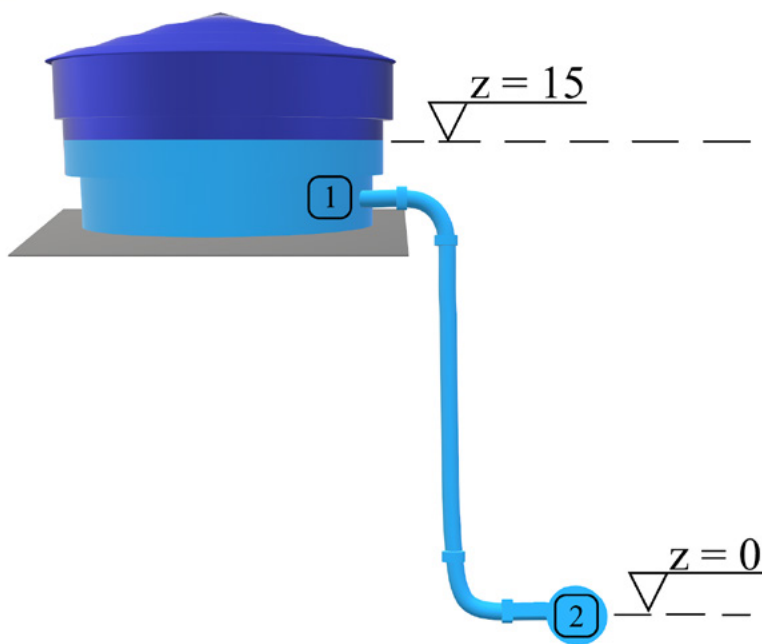
A parcela $\frac{P}{\rho}$ da Equação 4.1 representa a energia do escoamento, $\frac{V^2}{2}$ a energia cinética ou de movimento, e gz , a energia potencial gravitacional. Se ocorrer a variação da energia mecânica, tomando como base a Equação 4.1, ela será dada pela Equação 4.2.

$$\Delta e_{mec} = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g (z_2 - z_1) \quad (4.2)$$

Observemos que a massa específica ρ não se altera e que a Equação 4.2 é aplicada apenas a fluidos incompressíveis, além de a energia mecânica de um sistema não se alterar se a pressão, a velocidade e a elevação permanecerem constantes. Outrossim, na ausência de perdas, a variação da energia mecânica representa o trabalho mecânico fornecido ao fluido se $\Delta e_{mec} < 0$ ou extraído do fluido se $\Delta e_{mec} > 0$ (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

Tomando como exemplo um sistema de instalação hidráulica, cuja energia do fluido armazenada no reservatório chega ao chuveiro com pressão suficiente para um banho confortável, fica mais fácil perceber quais são as formas de energia mecânica envolvidas nesse sistema.

Figura 4.1 – Uma caixa d’água utilizada para o estudo da energia mecânica no escoamento.



Fonte: Elaborada pelos autores.

No esquema da Figura 4.1, há uma elevação de 15 metros ($z = 15$ m) de uma caixa d’água. Com isso, o fluido no ponto 1, levando em conta a parcela gz da Equação 4.1, e a gravidade g igual a $9,81 \text{ m/s}^2$ têm uma energia potencial de $147,3 \text{ J/kg}$. Todavia, quando o fluido escoar do ponto 1 ao ponto 2, observamos que, conforme ele perde energia potencial (elevação), ganha energia cinética devido à atuação da gravidade, de forma que a parcela $\frac{v^2}{2}$ da Equação 4.1, referente à energia cinética, também será igual a $147,3 \text{ J/kg}$ no ponto 2, pois o exemplo desconsidera as perdas de energia por atrito do fluido com a parede do tubo. Da mesma maneira, quando o fluido passar do ponto 2 e chegar no chuveiro, a

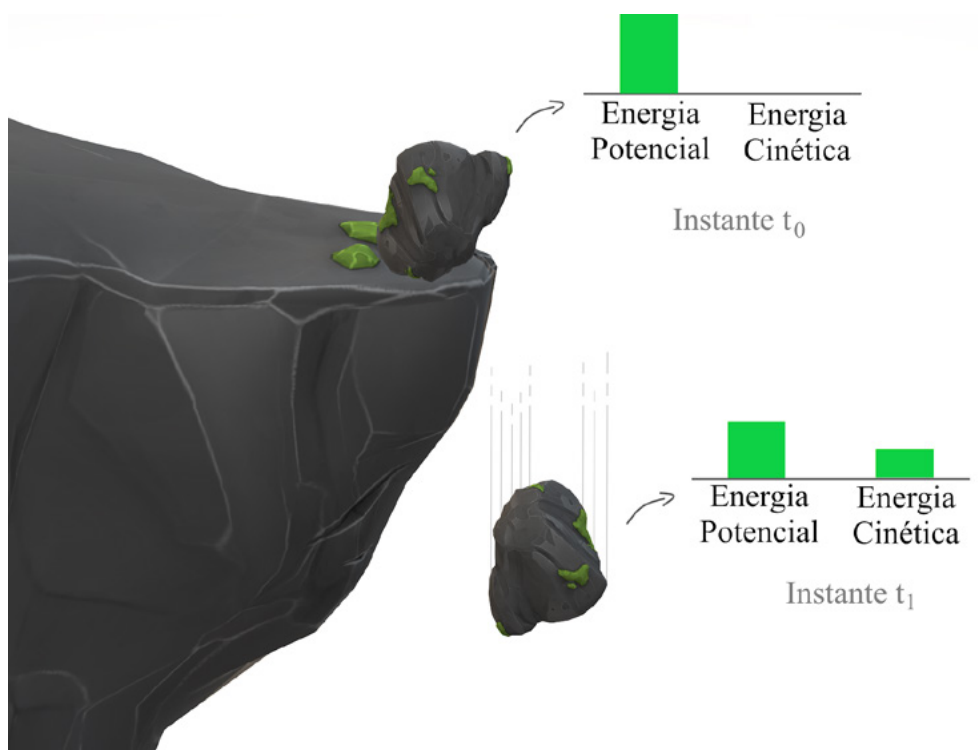
energia do escoamento $\frac{P}{\rho}$ resulta em 147,3 J/kg. Se $\frac{P}{\rho}=147,3 \text{ J/kg}$ e $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$, a pressão da água para um banho confortável será de $1,473 \times 10^5 \text{ Pa}$. Portanto, pela Equação 4.1, a energia mecânica total será dada por $e_{mec}=(147,3+147,3+147,3) \text{ J/kg}=441,9 \text{ J/kg}$.

4.2 Equação geral da energia

Em conformidade com Çengel e Cimbala (2015), a primeira lei da termodinâmica, conhecida também como princípio da conservação da energia, é uma das principais da natureza porque permite o estudo de diferentes formas de energia e de suas limitações. Essa lei afirma que a energia não pode ser criada nem destruída durante um processo, que ela só pode mudar de forma (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Logo, todas as parcelas de energia devem ser consideradas em um estudo.

Por exemplo, imagine uma pedra parada no topo de um penhasco. No instante t_0 , ela tem energia potencial gravitacional máxima. Suponhamos que essa pedra comece a cair morro abaixo, no instante t_1 , e, à medida que perde altura (energia potencial), ela ganha velocidade (energia cinética), como pode ser observado na Figura 4.2.

Figura 4.2 – Conversão de energia potencial em energia cinética.



Fonte: Elaborada pelos autores.

O exemplo da Figura 4.2 deixa claro a transformação de um tipo de energia em outro. Da mesma forma, à primeira lei da termodinâmica se aplica uma dieta de aumento ou perda de peso: uma pessoa com maior entrada de energia (alimentos) do que saída (com atividades físicas) ganhará peso (a energia será armazenada na forma de gordura) e, inversamente, se ela tiver uma saída maior de energia do que de entrada, perderá peso.

Desse modo, o princípio da conservação da energia exige que a transferência líquida de energia de um sistema para outro seja igual à variação da energia no sistema (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Observamos que o princípio da conservação da energia ou balanço de energia, analogamente ao princípio da conservação da massa, pode ser escrito como:

$$\dot{E}_e - \dot{E}_s = \left(\frac{dE}{dt} \right)_s \quad (4.3)$$

Onde $\dot{E}_e$ é a taxa de energia que entra no sistema, $\dot{E}_s$ é a taxa de energia que sai do sistema e $\left(\frac{dE}{dt} \right)_s$ representa a variação da energia no sistema em função do tempo.

A Equação 4.3 indica que o fluxo líquido de energia que entra e sai de um sistema é igual à variação da energia nesse sistema para um dado intervalo de tempo. Quando falamos em fluxo líquido, estamos tratando basicamente da quantidade de energia que atravessa uma superfície de controle em um intervalo de tempo.

Os conceitos de sistema e volume de controle, assim como a relação entre eles, estabelecida pelo Teorema de Transporte de Reynolds, também são empregados neste capítulo.

Como visto no capítulo 1, apesar de o sistema fechado não trocar matéria com o meio externo, ele pode trocar energia. Essa energia pode ser transferida de um sistema para outro por calor ou trabalho (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

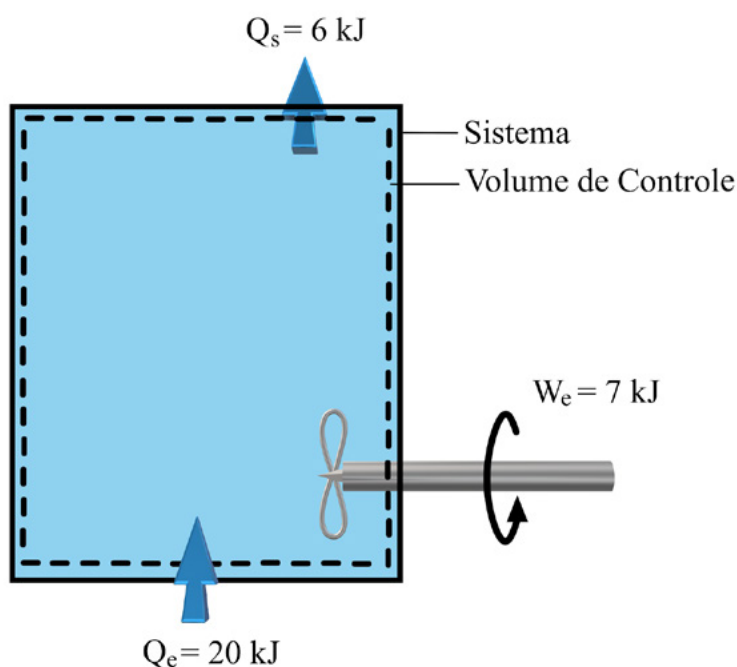
A transferência de calor e a transferência de trabalho são consideradas positivas quando ocorrem para dentro do sistema e negativas quando ocorrem para fora do sistema (MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004). Por essa razão, é importante definir com clareza o sistema que será determinado, pois, se a energia não entrar ou sair do sistema, ela será conservada.

Em um sistema fechado, a taxa líquida de transferência de calor para o sistema é representada por $\dot{Q}_{tot}$ e a taxa de transferência de trabalho para o sistema é representada por $\dot{W}_{tot}$ (MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004). Essas considerações, se aplicadas na Equação 4.3, resultam em:

$$\dot{Q}_{tot} + \dot{W}_{tot} = \left(\frac{dE}{dt} \right)_s \quad (4.4)$$

Onde $\dot{Q}_{\text{tot}} = \dot{Q}_e - \dot{Q}_s$ é a taxa de variação de transferência de calor para dentro do sistema (negativo se for para fora), $\dot{W}_{\text{tot}} = \dot{W}_e - \dot{W}_s$ é a entrada de potência total no sistema em todas as formas (negativa, se for saída de potência) e $\left(\frac{dE}{dt}\right)_s$ é a taxa de variação no tempo do conteúdo total de energia do sistema.

Figura 4.3 – Variação de energia de um sistema durante um processo.



Fonte: Adaptada de ÇENGEL; CIMBALA, 2015.

A Figura 4.3 apresenta um exemplo no qual o sistema e o volume de controle coincidem. Dessa forma, há uma quantidade $\dot{Q}_e = 20 \text{ kJ}$ de energia térmica que entra no sistema e uma quantidade de $\dot{Q}_s = 6 \text{ kJ}$ que sai. Logo, $\dot{Q}_{\text{tot}} = \dot{Q}_e - \dot{Q}_s = 20 - 6 = 14 \text{ kJ}$. Há também uma quantidade $\dot{W}_e = 7 \text{ kJ}$ de trabalho que entra no sistema. Assim,

$\dot{W}_{\text{tot}} = \dot{W}_e - \dot{W}_s = 7 - 0 = 7 \text{ kJ}$. Portanto, conforme a Equação 4.4, a taxa de variação no tempo do conteúdo total de energia do sistema será dada por $\left(\frac{dE}{dt}\right)_s = 14 + 7 = 21 \text{ kJ}$.

4.2.1 Transferência de energia por calor

A temperatura dos corpos tende a se estabilizar com a temperatura ambiente, e isso fica notório ao colocarmos um copo de água bem gelado em cima da mesa em um dia de muito calor. Em poucos minutos, a temperatura da água se estabiliza com a do ambiente porque a diferença de temperatura entre a água e o ambiente provoca uma transferência de calor. Podemos traçar aqui um paralelo: assim como na eletrônica, a diferença de potencial que coloca os elétrons em movimento é a força eletromotriz (EISMIN, 2016), aqui a diferença de temperatura é a força motriz da transferência de calor.

Quando essa transferência não ocorre ou ocorre de forma insignificante, a ponto de poder ser desprezada, chamamos esse processo de adiabático. Ele ocorre quando o sistema fechado está muito bem isolado do meio externo ou quando a diferença de temperatura mencionada anteriormente é bem pequena (HELERBROCK, [20--]).

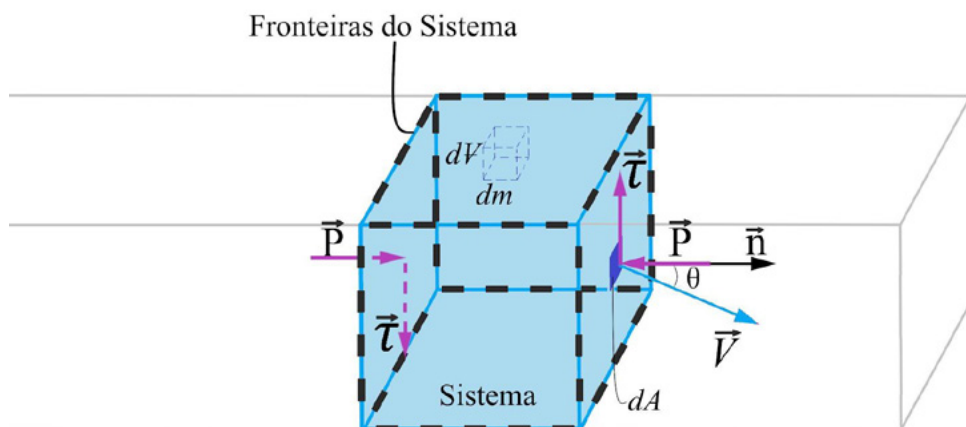
4.2.2 Transferência de energia por trabalho

O trabalho está associado à aplicação de uma força que provoca determinado deslocamento (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016), sendo que um sistema pode envolver inúmeras formas de trabalho e o trabalho total $\dot{W}_{\text{tot}}$ é expresso como:

$$\dot{W}_{\text{tot}} = \dot{W}_{\text{eixo}} + \dot{W}_{\text{pressão}} + \dot{W}_{\text{viscosidade}} + \dot{W}_{\text{outro}} \quad (4.5)$$

Na Equação 4.5, $\dot{W}_{\text{eixo}}$ é o trabalho fornecido por um eixo giratório encontrado em mecanismos como bombas ou turbinas, por exemplo: $\dot{W}_{\text{pressão}}$ é o trabalho transmitido pelas forças que a pressão exerce sobre a superfície de controle (Figura 4.4); $\dot{W}_{\text{viscosidade}}$ é o trabalho realizado pelas componentes tangenciais (cisalhantes, de cisalhamento ou viscosas) das forças atuantes na superfície de controle; e $\dot{W}_{\text{outro}}$ é o trabalho realizado por outras forças, como as elétricas e magnéticas.

Figura 4.4 – Força de pressão aplicada em um diferencial de área dA na superfície de um sistema.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Considere um sistema com uma quantidade material de fluido que se move com o escoamento e pode se deformar com a aplicação de uma pressão P em uma área dA , como ilustrado na Figura 4.4. A força de pressão atuando em dA será dada por PdA . Sabendo que o trabalho é dado pelo produto entre a força e a distância, e que a distância percorrida por unidade de tempo é a velocidade, concluímos que a taxa de variação no tempo do trabalho realizado pelas forças de pressão, sobre essa parte diferencial do sistema, será dada por:

$$\delta \dot{W}_{\text{pressão}} = -P \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (4.6)$$

O vetor unitário $\vec{n}$ é normal e exterior à área dA , o produto escalar entre os vetores $\vec{V}$ e $\vec{n}$ será positivo quando o ângulo θ entre eles for menor que 90° (ou seja, quando o sistema expande) e negativo quando θ for maior que 90° (ou seja, quando o sistema é comprimido). O sinal de negativo serve para indicar que a pressão positiva ocorre contrária ao vetor normal $\vec{n}$, de fora para dentro. Assim, a taxa líquida de trabalho realizado pelas forças de pressão em toda a superfície do sistema é obtida pela integração:

$$\dot{W}_{\text{pressão, líquida}} = - \int_A P \vec{V} \cdot \vec{n} dA = - \int_A \frac{P}{\rho} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (4.7)$$

Portanto, a relação de conservação de energia em termos da taxa de variação no tempo de um sistema fechado pode ser escrita como:

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_s = \dot{Q}_{\text{líquida}} + \dot{W}_{\text{eixo, líquido}} \quad (4.8)$$

Para determinar $\left(\frac{dE}{dt} \right)_s$, relação da conservação de energia de um sistema pela taxa de variação no tempo, vamos utilizar o Teorema de Transporte de Reynolds, apresentado no capítulo 2, na Equação 2.20 como: $\left(\frac{dB}{dt} \right)_s = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} b \rho \vec{V}_R \cdot \vec{n} dA$.

Considerando a propriedade extensiva B , a energia E e a propriedade intensiva b , sendo que $e = E/m$, temos:

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_s = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho e dV + \int_{SC} e \rho \vec{V}_R \cdot \vec{n} dA \quad (4.9)$$

Das Equações 4.8 e 4.9 chegaremos à expressão para a equação geral da energia para um volume de controle fixo, móvel ou deformável:

$$\dot{Q}_{líquida} + \dot{W}_{eixo,líquido} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho e \, dV + \int_{SC} e \rho \vec{V}_R \cdot \vec{n} \, dA \quad (4.10)$$

A Equação 4.10 informa que a taxa líquida de transferência de energia para um volume de controle por transferência de calor e trabalho é igual à taxa de variação no tempo do conteúdo de energia no volume de controle mais a taxa de escoamento líquida da energia para fora da superfície de controle por escoamento de massa (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Substituindo a integral de superfície pela taxa de variação do trabalho de pressão da Equação 4.7 na Equação 4.10 e combinando-a com a integral de superfície no lado direito, obtemos:

$$\dot{Q}_{líquida} + \dot{W}_{eixo,líquida} + \dot{W}_{pressão,líquida} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho e \, dV + \int_{SC} \left(\frac{P}{\rho} + e \right) \rho \vec{V}_R \cdot \vec{n} \, dA \quad (4.11)$$

Existem várias maneiras de aplicarmos os conceitos da equação da conservação da energia, inclusive no desenvolvimento da equação de Bernoulli, que será vista a seguir. Podemos utilizar os conceitos da equação da conservação de energia para determinar as perdas de energia na tubulação, a eficiência hidráulica de uma bomba, determinar as grandezas relacionadas à descarga de um orifício ou vertedor, jato livre, ou ainda podemos trabalhar com medidores de vazão, como o tubo de Pitot. Alguns desses itens são abordados de forma prática e com pormenores no curso de Hidráulica.

4.3 Equação de Bernoulli

A equação de Bernoulli diz respeito à conservação das energias potenciais (gravitacionais), cinéticas e de escoamento em uma cor-



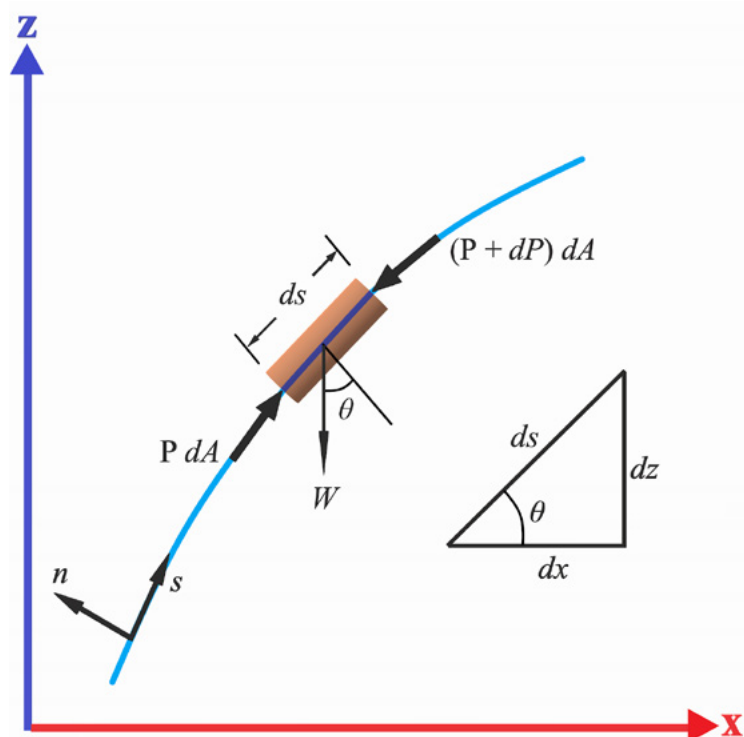
rente de fluido onde o efeito líquido das forças viscosas é desprezível. Ela representa uma relação aproximada entre a pressão, a velocidade e a elevação, e é válida em regiões de escoamento incompressível e em regime permanente, onde as forças de atrito resultantes são desprezíveis (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

Para os resultados apresentados nesta seção, serão consideradas as hipóteses simplificadoras a seguir.

- Regime permanente: qualquer propriedade do sistema, em determinado ponto, não se altera com o passar do tempo.
- Escoamento incompressível: é a consideração feita de que a massa específica do fluido permaneça constante em qualquer posição. Na prática, essa aproximação é satisfatória para o escoamento de líquidos, pois são praticamente incompressíveis (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Por outro lado, para os gases, nem sempre é possível fazer essa simplificação, pois eles são altamente compressíveis (SOUZA, [20--]).
- Nenhum trabalho de eixo: a seção de escoamento considerada não pode conter nenhuma bomba, turbina, ventilador ou qualquer outra máquina ou propulsor, uma vez que tais dispositivos destroem as linhas de corrente e desenvolvem trocas de energia com as partículas do fluido (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).
- Viscosidade desprezível: sem perdas de energia devido ao atrito.
- Escoamento isotérmico: a temperatura do sistema permanece constante.

Após adotar todas as hipóteses simplificadoras, deduzimos a equação de Bernoulli aplicando a Segunda Lei de Newton, chamada, em Mecânica dos Fluidos, de relação da conservação da quantidade de movimento linear (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Para isso, considere o escoamento da Figura 4.5, que possui um volume infinitesimal de fluido movendo-se na linha de corrente.

Figura 4.5 – Escoamento em regime permanente ao longo de uma linha de corrente.



Fonte: Adaptada de ÇENGEL; CIMBALA, 2015.

Ao aplicarmos a Segunda Lei de Newton para o volume de controle na direção s , temos que:

$$\sum F_s = ma_s \quad (4.12)$$

Onde F_s é a força que atua na direção s , m é a massa e a_s é a componente do vetor de aceleração na direção s . As duas forças significativas são as forças de pressão, normais às paredes do volume de controle infinitesimal — já que as tensões de cisalhamento são consideradas insignificantes nesta dedução — e a componente força peso na direção da linha de corrente. Fazendo o somatório de forças

do lado esquerdo da Equação 4.12 e aplicando a regra da cadeia da aceleração, temos:

$$P dA - (P + dP) dA - W \sin \theta = m V \frac{dV}{ds} \quad (4.13)$$

Os dois primeiros termos do lado esquerdo da equação referem-se à pressão agindo em cada uma das faces do volume infinitesimal, onde P é a pressão, dP é a variação de pressão, dA é a área infinitesimal da superfície, W é o peso da partícula e V é a velocidade infinitesimal. O terceiro termo diz respeito à componente da força peso na direção s . A variável θ é o ângulo entre o eixo vertical z e a direção normal à linha de corrente. O termo $\frac{dV}{ds}$ representa a aceleração do volume de controle, expressa dessa forma pela regra da cadeia.

A massa pode ser escrita como o produto da massa específica pelo volume, assim temos $m = \rho V = \rho dA ds$. Também é possível escrever o peso da partícula da seguinte forma: $W = mg = \rho g dA ds$ e $\sin \theta = dz/ds$. Lembrando da velocidade $ds/dt = V$, a Equação 4.13 pode ser escrita conforme segue:

$$-dP dA - \rho g dA ds \frac{dz}{ds} = \rho dA ds V \frac{dV}{ds} \quad (4.14)$$

Ao cancelar dA em todos os termos da equação e simplificando os termos com ds , temos:

$$-dP - \rho g dz = \rho V dV \quad (4.15)$$

Dividindo cada termo por ρ e sabendo que $V dV = \frac{1}{2} d(V^2)$, temos:

$$\frac{dP}{\rho} + \frac{1}{2} d(V^2) + g dz = 0 \quad (4.16)$$

Integrando cada termo da Equação 4.16, obtemos:

$$\frac{dP}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante (ao longo de uma linha de corrente)} \quad (4.17)$$

Levando em conta a consideração feita inicialmente de que se trata de um fluido incompressível, ρ permanece constante e a Equação 4.17 fica sendo:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante (ao longo de uma linha de corrente)} \quad (4.18)$$

A Equação 4.18 é também conhecida como balanço de energia mecânica (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Atentemo-nos para não confundir o termo “balanço de energia mecânica” com “balanço de energia”, que resulta em outro raciocínio e outras formulações matemáticas. Cada termo dessa equação está associado a um tipo de energia do escoamento: o termo P/ρ representa a energia de escoamento atuante no fluido; o termo $V^2/2$ diz respeito à energia cinética do fluido e, por último, o termo gz está associado à energia potencial gravitacional. Sabendo que entre dois pontos quaisquer, 1 e 2, em uma linha de corrente a energia total é a mesma, é comum escrever a equação da energia mecânica da seguinte forma:

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \quad (4.19)$$

Dividimos todos os termos da equação por g e temos o teorema de Bernoulli.

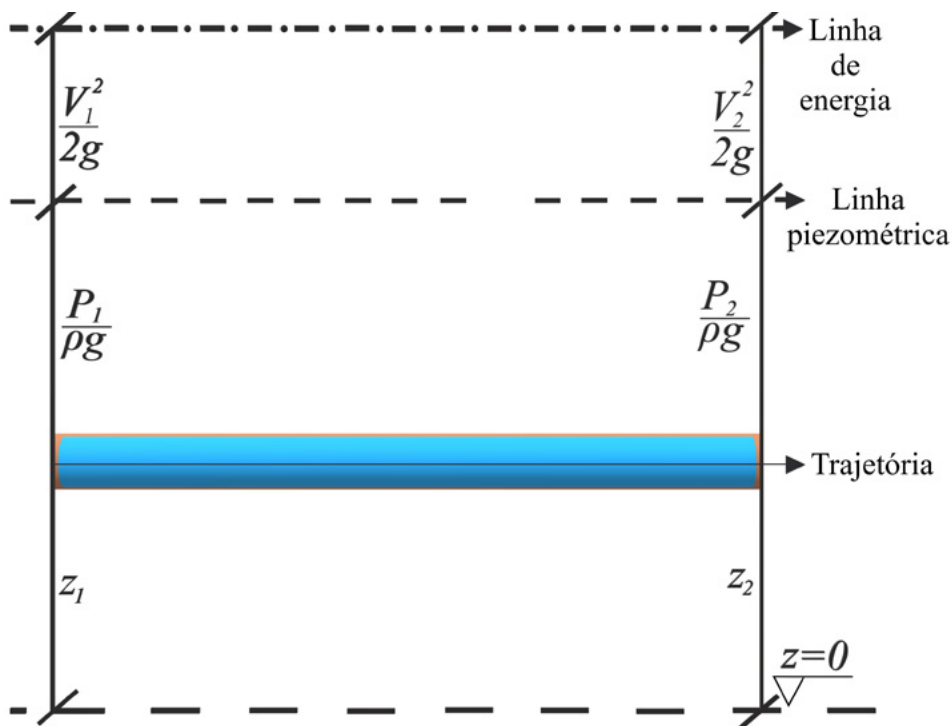
$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \quad (4.20)$$

Nessa equação, cada termo tem dimensão de comprimento. Diz-se que cada termo representa um tipo de “carga” em vez de energia (AZEVEDO NETTO; FERNÁNDEZ, 2015). Cada termo é definido conforme segue.

- $P/\rho g$ – carga da pressão: representa a altura de uma coluna de fluido para que a pressão estática P seja produzida.
- $V^2/2g$ – carga da velocidade: representa a altura necessária para que o fluido atinja a velocidade V em queda livre, sem atrito.
- z – carga da elevação: representa a energia potencial gravitacional do fluido.

Para entender onde situam-se essas cargas referentes à pressão, à velocidade e à elevação, observe a Figura 4.6, na qual está representada uma tubulação de seção circular por onde um fluido escoar. Perceba que a parcela referente à altura de elevação z equivale à distância entre o nível de referência e um ponto, e acima da tubulação há uma parcela referente à pressão estática $\frac{P}{\rho g}$ do fluido. As parcelas $z + \frac{P}{\rho g}$ equivalem à cota piezométrica, que nada mais é do que uma cota de pressão (análoga à cota topográfica), sendo que, com as cotas piezométricas, podemos traçar uma linha piezométrica. Acima da cota piezométrica, temos a carga cinética, cuja soma das cargas de pressão $\frac{P}{\rho g}$, dinâmica $\frac{V^2}{2g}$ e de elevação z resultam na linha de energia, que representa a energia mecânica total do sistema.

Figura 4.6 – Tubo de secção circular por onde um fluido escoia.



Fonte: Adaptada de PORTO, 2006.

Na figura 4.6, temos os valores de pressão nas seções 1 e 2 em análise P_1 e P_2 . Assim, a carga total de energia H no esquema é o somatório das três parcelas de energia, de forma que a Equação 4.20 pode ser escrita simplificada como:

$$H_1 = H_2$$

(4.21)

4.3.1 Equação de Bernoulli com presença de máquinas

Existem máquinas que podem acrescentar ou retirar energia de um escoamento. As máquinas que acrescentam energia serão chamadas de “bombas”, enquanto as máquinas que retiram energia serão chamadas de “turbinas” (AZEVEDO NETTO; FERNÁNDEZ, 2015). As máquinas do tipo bomba hidráulica são utilizadas, por exemplo, para viabilizar o transporte de água potável de uma região de cota topográfica mais baixa para uma região de cota mais elevada, uma vez que elas adicionam energia ao sistema, possibilitando que a água atue contra a ação da gravidade. Para exemplificar as máquinas do tipo turbina hidráulica, retomemos o exemplo da Figura 1.25, na qual uma turbina transforma, por meio do movimento de suas pás, a energia potencial da água em energia cinética, a qual é convertida em energia elétrica em um equipamento chamado gerador, acoplado na turbina.

Até o momento, não haviam sido consideradas máquinas no escoamento estudado, mas elas serão abordadas a partir de agora. Caso a máquina presente no escoamento seja uma bomba, o termo H_B será somado ao lado esquerdo da Equação 4.21, que representa a quantidade de energia fornecida pela bomba. Temos:

$$H_1 + H_B = H_2 \quad (4.22)$$

Por outro lado, em presença de uma turbina, a Equação 4.22 fica:

$$H_1 - H_T = H_2 \quad (4.23)$$

Onde H_T representa a quantidade de energia retirada do fluido pela turbina.

Apesar de a equação de Bernoulli ser prática e amplamente aplicada em estudos sobre a Mecânica dos Fluidos, é preciso ter atenção à sua validade, uma vez que ela só se aplica a regiões do escoamento

onde o efeito do atrito é desprezível, ou seja, regiões não viscosas fora da camada limite (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

4.4. Potência e rendimento de máquinas

Antes de apresentar os conceitos relacionados à potência total de uma máquina e seu rendimento, cabe reforçar conceitos relacionados às formas de energia mecânica. A Equação de Bernoulli apresenta três tipos de energia: energia potencial, cinética e do escoamento (pressão). Nesse caso, a energia potencial é dada pelo peso da partícula W e o deslocamento z , $E_p = Wz$. Como $W = mg$, a energia potencial é representada por:

$$E_p = mgz \quad (4.24)$$

Ao relacionar em termos unitários a Equação 4.24, obtemos a energia potencial de uma partícula de peso unitário ou a energia por unidade de peso (BRUNETTI, 2012).

$$z = \frac{mgz}{mg} = \frac{E_p}{W} \quad (4.25)$$

Essa relação pode ser estendida para a energia cinética $\left(\frac{E_c}{W}\right)$ e para a energia de pressão $\left(\frac{E_{pr}}{W}\right)$. Assim, como a energia mecânica é relacionada com o peso da partícula de fluido, a potência do fluido é relacionada ao tempo, pois, por definição, potência é qualquer energia mecânica por unidade de tempo (BRUNETTI, 2008).

Dessa forma, temos que:

$$Pot = \frac{E_{mecânica}}{Tempo} \quad (4.26)$$

O que equivale à:

$$Pot = \frac{E_{mecânica}}{W} \frac{W}{Tempo} \quad (4.27)$$

A energia mecânica por unidade de peso já foi definida como “carga” e o peso por unidade de tempo resulta da vazão em peso Q_w .

$$Pot = carga \ Q_w \quad (4.28)$$

O peso do fluido pode ser relacionado em termos específicos quando dividido pelo volume V (chamado de peso específico), $\gamma = \frac{W}{V}$, onde $W = \gamma V$. Logo:

$$Q_w = \frac{W}{t} = \frac{\gamma V}{t} \quad (4.29)$$

A relação entre o volume V e o tempo t resulta na vazão em volume Q , de forma que a Equação 4.28 pode ser reescrita:

$$Pot = \gamma \ Q \ carga \quad (4.30)$$

Tendo o conceito de carga H como o somatório das três parcelas de energia mecânica (potencial, cinética e do escoamento), reescrevemos a Equação 4.30 para obter a potência do fluido.

$$Pot = \gamma \ Q \ H \quad (4.31)$$

De forma análoga ao conceito de potência do fluido, a potência das máquinas é calculada a partir das seguintes equações:

$$Pot = \gamma \ Q \ H_B \quad (4.32)$$



$$Pot = \gamma Q H_T \quad (4.33)$$

Onde H_b é a carga da bomba ou carga manométrica da bomba e H_T é a carga da turbina.

Em termos práticos, parte da potência das máquinas é perdida na transmissão de energia, logo, a potência fornecida (bomba) ou retirada (turbina) do fluido nunca será a mesma da máquina, a qual é definida como sendo a potência de seu eixo.

Considerando que, no sistema em que o fluido se movimenta, há perdas de carga (energia), a potência da máquina deverá ser sempre maior que a potência do fluido. Além disso, é possível calcular o rendimento da bomba η_B , pois é uma relação entre a potência do fluido e da máquina (bomba):

$$\eta_B = \frac{Pot}{Pot_B} \quad (4.34)$$

$$Pot_B = \frac{Pot}{\eta_B} = \frac{\gamma Q H}{\eta_B} \quad (4.35)$$

De forma análoga, a potência da turbina η_T é obtida:

$$\eta_T = \frac{Pot_T}{Pot} \quad (4.36)$$

$$Pot_T = Pot \eta_T = \gamma Q H \eta_T \quad (4.37)$$

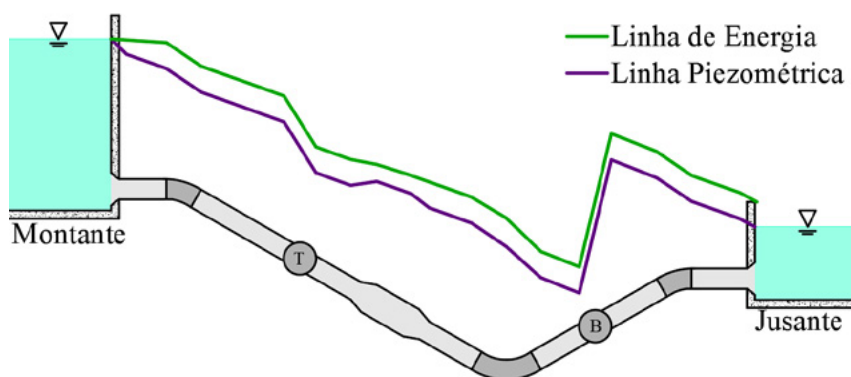
As unidades de medida utilizadas para a potência são unidades de trabalho por unidade de tempo N/m.s, J/s e W ou ainda cv (cavalo-vapor) e hp (horse-power).

4.5 Perda de energia mecânica no escoamento do fluido

O fluido, ao escoar através de um volume de controle qualquer, encontra forças de resistência, sejam elas por conta da ação da gravidade (forças de campo) ou devido ao contato (pressão e atrito) (PORTO, 2006). As forças de resistência fazem com que o fluido perca parte de sua energia no trajeto de seu movimento, o que torna necessário o cálculo dessas perdas para quantificar a energia que entra e a que sai de um volume de controle.

Em um sistema hidráulico de tubulações, por exemplo, quando a água escoa de um local para outro, ela sofre perdas de carga devido ao atrito com as superfícies sólidas do tubo, chamadas de perdas de carga distribuídas, e, em razão de especificidades como as mudanças de direção do fluido nas conexões, ela sofre perdas singulares (ou localizadas), como apresentado na Figura 4.7.

Figura 4.7 – Perdas de carga em uma instalação que liga dois reservatórios de água.



Fonte: Elaborada pelos autores.

As Equações 4.22 e 4.23 apresentam o teorema de Bernoulli com a presença de máquinas como $H_1 + H_B = H_2$, no caso do uso de bombas, e $H_1 - H_T = H_2$ para turbinas. Se considerarmos as perdas

de carga no sistema, o teorema de Bernoulli com o uso de máquinas fica:

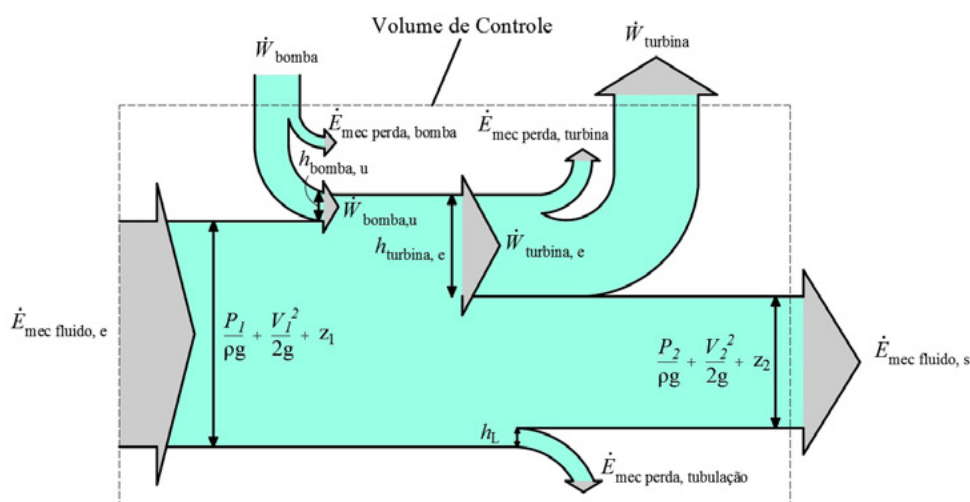
$$H_1 + H_B = H_2 + H_T + H_f \quad (4.38)$$

Detalhando a Equação 4.38, temos:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + H_B = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + H_T + H_f \quad (4.39)$$

Onde $\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1$ é a carga que entra no sistema; H_B é a carga útil fornecida ao fluido pela bomba; $\frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$ é a carga que sai do sistema; H_T é a carga extraída do fluido pela turbina; e H_f são as perdas de cargas totais no sistema (distribuídas e singulares). Na Figura 4.8, é possível observar as cargas de energia da Equação 4.39.

Figura 4.8 – Escoamento permanente com uso de bomba e turbina e representação de suas perdas de carga.



Fonte: Adaptada de ÇENGEL; CIMBALA, 2015.

Ter conhecimento das quantidades de energia que entram e que saem de um volume de controle arbitrário e de suas perdas auxilia, por exemplo, no dimensionamento de sistemas hidráulicos das instalações prediais, de sistemas de abastecimento de água potável, de sistemas de coleta e transporte de esgotos sanitários, de sistemas de aproveitamento hidrelétricos e de sistemas de aproveitamento de águas pluviais, entre várias outras aplicações.

Referências

AZEVEDO NETTO, J. M. de; FERNÁNDEZ, M. y F. **Manual de hidráulica**. 9. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2015.

BRUNETTI, F. **Mecânica dos fluidos**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. **Mecânica dos fluidos**: fundamentos e aplicações. 3. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2015.

EISMIN, T. K. **Eletrônica de aeronaves**: introdução aos sistemas aviônicos. Porto Alegre: Ed. Bookman, 2016. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=k1SnDAAQBAJ&pg=PA7&dq#v=onepage&q&f=false>. Acesso em: 14 jul. 2020.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

HELERBROCK, R. Transformação adiabática. **Brasil Escola**, Goiânia, [20--]. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/transformacao-adiabatica.htm>. Acesso em: 16 jul. 2020.

MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. **Fundamentos da mecânica dos fluidos**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2004.

PORTO, R. M. de. **Hidráulica básica**. 4. ed. São Carlos: EESC-USP, 2006.

SOUZA, L. A. Propriedades dos líquidos. **Brasil Escola**, Goiânia, [20--]. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/quimica/propriedades-dos-liquidos.htm>. Acesso em: 16 jul. 2020.

CONSERVAÇÃO DO MOMENTO

Na obra intitulada *Mathematical principles of natural philosophy*, conhecida também como *Principia*, de Isaac Newton, são apresentadas as leis que regem o movimento. As leis de Newton são caracterizadas por relações entre o movimento dos corpos e as forças que atuam sobre ele (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Dentre as três leis apresentadas na obra *Principia*, a segunda delas é de interesse para o entendimento dos conceitos que desejamos apresentar neste capítulo.

5.1 O momento e a Segunda Lei de Newton

A segunda lei do movimento de Newton enuncia que uma certa alteração no movimento é proporcional à força motriz realizada e, além disso, dá-se ao longo da linha reta na qual aquela força é exercida (CREASE, 2011). Em termos matemáticos:

$$\vec{F}_R = m\vec{a}$$

(5.1)

Onde $\vec{F}_R$ é a força resultante, m é a massa do sistema e $\vec{a}$ é a aceleração do sistema. Ou seja, um sistema de massa m move-se a partir da aplicação de uma força (grandeza vetorial) e essa força produz uma aceleração (grandeza vetorial) no mesmo sentido e direção.

A aceleração do corpo é obtida pela relação entre a variação de velocidade do corpo e o tempo, de forma que:

$$\vec{a} = \frac{\vec{V}_1 - \vec{V}_0}{t_1 - t_0} = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (5.2)$$

Sabendo que o vetor aceleração representa a variação da velocidade em relação ao tempo e que a quantidade de movimento, ou simplesmente momento, é o produto da massa do sistema e sua velocidade, a Equação 5.1 pode ser reescrita como:

$$\vec{F}_R = m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} \quad (5.3)$$

Nessa equação, pode-se dizer que a taxa de variação da quantidade de movimento ($m\vec{V}$) é igual ao somatório das forças externas que atuam no sistema (MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004).

Na Equação 5.3, observe que, assim como a força, a aceleração e a velocidade são grandezas vetoriais; o momento é múltiplo da velocidade e, portanto, também é uma grandeza vetorial que tem a direção da velocidade. Sabendo que toda equação vetorial pode ser escrita na forma escalar para uma direção especificada, a Equação 5.3 para uma trajetória de fluxos de corrente na direção x fica:

$$\vec{F}_{R,x} = m \vec{a}_x = \frac{d(m\vec{V}_x)}{dt} \quad (5.4)$$

Esse conceito é conveniente para o estudo das forças resultantes da variação de velocidades de fluxos de correntes, de forma que, em Mecânica dos Fluidos, a Segunda Lei de Newton é conhecida como equação do momento linear (ÇENGEL; CIMBALA, 2015) ou equação da quantidade de movimento linear (MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004).

Como já discutido no capítulo 2, na Mecânica dos Fluidos, é sempre mais conveniente trabalhar com volume de controle em vez de sistema. Para abordar a aplicação da Segunda Lei de Newton (Equação 5.3) em um volume de controle finito, devemos entender primeiramente quais são as forças que atuam sobre o volume de controle. Por isso, discutamos tais forças.

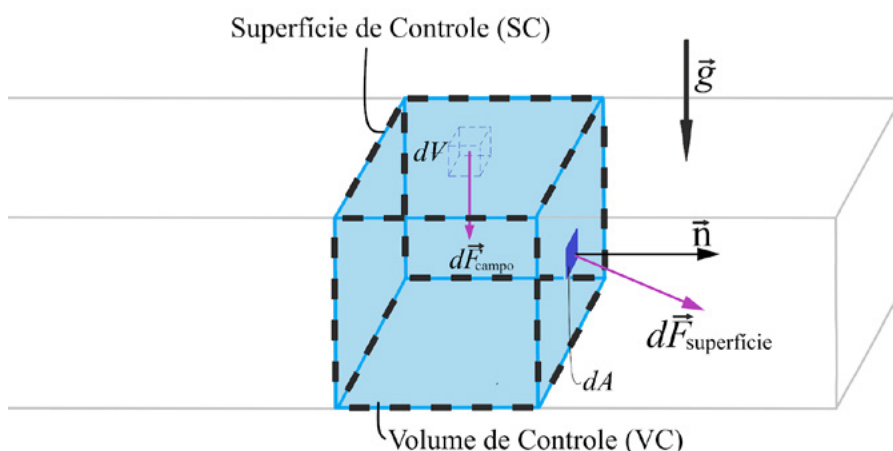
5.2 Forças que atuam sobre um volume de controle

Há basicamente dois tipos de forças que atuam sobre um volume de controle: 1) as forças de campo, que agem sobre todo o volume de controle, como as forças da gravidade, elétricas e magnéticas; e 2) as forças de superfície, que atuam sobre a superfície do volume de controle, caracterizadas como forças de pressão e de reação nos pontos de contato (viscosas e outras) (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Dessa forma, a força total que atua sobre o volume de controle é obtida por meio da Equação 5.5, na abordagem de Çengel e Cimbala (2015).

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{\text{gravidade}} + \sum \vec{F}_{\text{pressão}} + \sum \vec{F}_{\text{viscosa}} + \sum \vec{F}_{\text{outras}} \quad (5.5)$$

Em um volume de controle arbitrário, isolado de sua vizinhança, conforme a Figura 5.1, analisaremos duas partes infinitesimais desse volume de controle, sendo que uma será tridimensional (onde atuam as forças de campo) e a outra bidimensional (onde atuam as forças de superfície).

Figura 5.1 – Forças de campo e de superfície atuando em um volume de controle finito.



Fonte: Elaborada pelos autores.

De acordo com Çengel e Cimbala (2015), a força de campo mais comum é a gravidade, que exerce uma força para baixo sobre cada elemento do volume de controle, ou seja, o peso do elemento infinitesimal, pois as forças elétricas e magnéticas, que também são forças de campo, não são relevantes para a situação em questão. Assim, temos a força de campo atuando em um elemento de fluido, e a equação será:

$$d\vec{F}_{campo} = d\vec{F}_{gravidade} = \rho \vec{g} dV \quad (5.6)$$

Onde ρ é a massa específica, $\vec{g}$ é o vetor gravitacional e V é o volume.

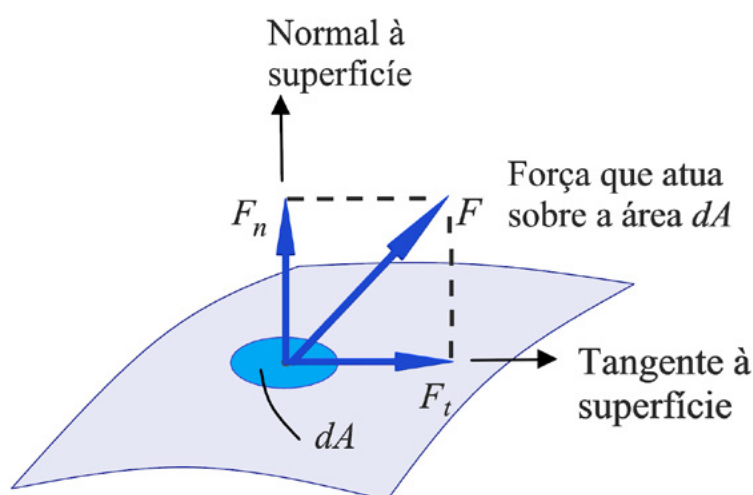
Integrando a Equação 5.6, obtemos a força total de campo para um volume de controle.

$$\sum \vec{F}_{campo} = \int_{VC} \rho \vec{g} dV = m_{VC} \vec{g} \quad (5.7)$$

Observe que, por definição, a massa específica de um fluido é a relação entre sua massa e o seu volume $\rho = \frac{m}{V}$, logo $m = \rho V$. Dessa forma, o somatório das forças de campo é o produto entre a massa do volume de controle e a aceleração da gravidade.

As forças de superfície são compostas por duas componentes, uma normal e a outra tangencial a um plano escolhido de modo arbitrário (ÇENGEL; CIMBALA, 2015), como podemos observar na Figura 5.2, na qual as forças normais F_n geram tensões normais σ (sigma) de pressão, que são sempre de compressão (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

Figura 5.2 – Força F que atua sobre uma área dA decomposta em suas componentes normal e tangencial.



Fonte: Adaptada de ÇENGEL; CIMBALA, 2015.

Em contrapartida, as forças tangenciais F_t geram tensões de cisalhamento τ (tau) compostas totalmente por tensões viscosas, visto que a pressão pode agir somente na direção normal à superfície

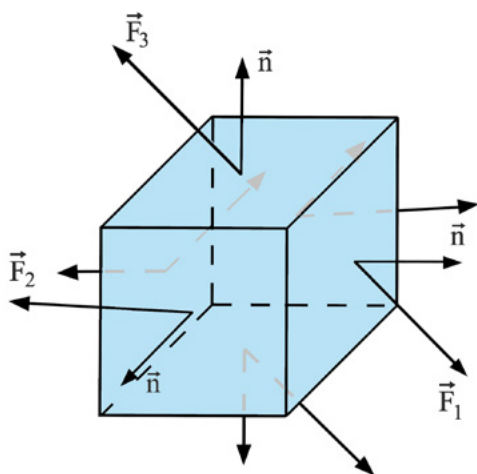
(ÇENGEL; CIMBALA, 2015), como é observado nas equações 5.8 e 5.9.

$$\sigma = \frac{F_n}{dA} \quad (5.8)$$

$$\tau = \frac{F_t}{dA} \quad (5.9)$$

As tensões são tensores de segunda ordem também conhecidos como tensores de tensão de Cauchy σ_{ij} (OLIVER; SARACIBAR, 2017), sendo que, para descrever as tensões de superfície em determinado ponto do escoamento, vamos recorrer a uma representação gráfica do tensor tensão com base em uma partícula elementar de volume no formato de um cubo. Nele, as faces são orientadas de acordo com os planos cartesianos e os vetores de força correspondentes são decompostos em suas componentes normais e tangenciais. Posteriormente, é feito o produto com a área, como ilustra a Figura 5.3.

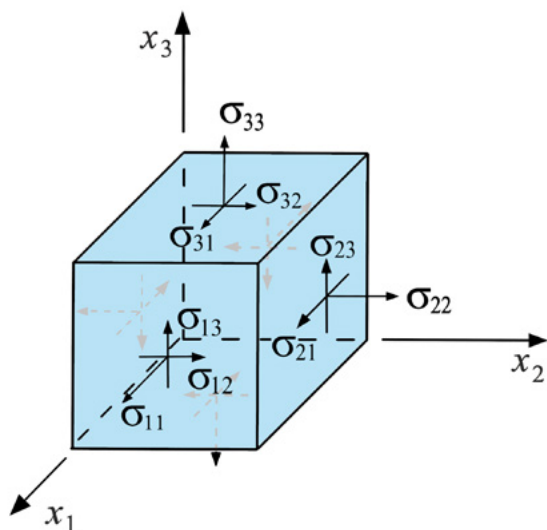
Figura 5.3 – Forças atuantes nas superfícies de uma partícula elementar de volume no formato de um cubo.



Fonte: Adaptada de OLIVER; SARACIBAR, 2017.

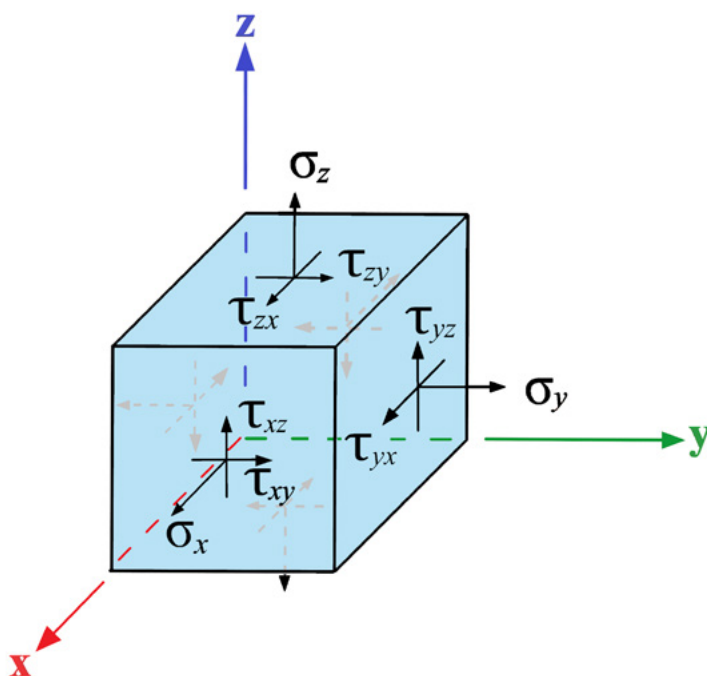
Na Figura 5.4, as tensões foram representadas com a notação científica e, na Figura 5.5, com a notação da engenharia.

Figura 5.4 – Representação gráfica das componentes de tensão de uma partícula elementar de volume no formato de um cubo na notação científica.



Fonte: Adaptada de OLIVER; SARACIBAR, 2017.

Figura 5.5 – Representação gráfica das componentes de tensão de uma partícula elementar de volume no formato de um cubo na notação da engenharia.



Fonte: Adaptada de OLIVER; SARACIBAR, 2017.

Nestas notações, a matriz de componentes do tensor tensão é escrita, respectivamente, como:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (5.10)$$

Todas as componentes na matriz do tensor tensão são referentes às faces positivas (direita, superior e frontal) e em sua orientação positiva. Para simplificar, vamos utilizar a notação da engenharia, na qual as componentes diagonais σ_x , σ_y e σ_z são as tensões normais,

e as componentes τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} e τ_{zy} são as tensões de cisalhamento. Os x, y e z subscritos nas componentes das tensões são índices, sendo que o primeiro índice nas tensões de cisalhamento refere-se ao plano perpendicular onde a tensão é aplicada, e o segundo índice refere-se à direção do eixo no qual é aplicada a tensão. Como nas tensões normais o plano perpendicular e o eixo são sempre os mesmos, o índice é escrito apenas uma vez.

O produto escalar de um tensor de segunda ordem por um vetor produz um outro vetor (KUNDU; COHEN, 2008). Assim, o produto escalar, também chamado de produto contraído ou produto interno, do tensor de tensões σ_{ij} por um vetor unitário $\vec{n}$, com sentido para fora da superfície e perpendicular a ela, resulta no vetor cujo módulo é a força por unidade de área que age sobre o elemento de superfície, como mostra a Equação 5.11.

$$d\vec{F}_{superfície} = \sigma_{ij} \cdot \vec{n} dA \quad (5.11)$$

Integrando a Equação 5.11 sobre toda a superfície de controle, temos:

$$\sum \vec{F}_{superfície} = \int_{SC} \sigma_{ij} \cdot \vec{n} dA \quad (5.12)$$

Portanto, a Equação 5.5 pode ser reescrita como:

$$\sum \vec{F} = \int_{VC} \rho \vec{g} dV + \int_{SC} \sigma_{ij} \cdot \vec{n} dA \quad (5.13)$$

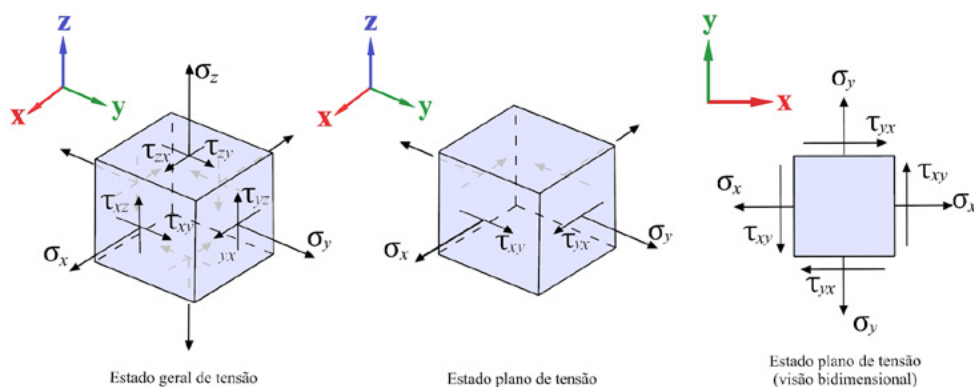
A Equação 5.13 é útil para a dedução da forma diferencial da conservação do momento linear, ou da conservação da quantidade de movimento linear. Entretanto, na análise prática de um volume de

controle, ela raramente é utilizada devido à integral de superfície ser complicada (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

Para entender melhor como obtemos a força de superfície por unidade de área a partir do produto contraído de um tensor de tensões por um vetor unitário perpendicular à superfície, acompanhe o exemplo a seguir.

Vamos considerar que a um corpo é aplicado uma força atuante apenas em suas laterais, ou seja, a força não será aplicada à superfície superior. Nessa condição, as componentes de tensão normal e de cisalhamento serão iguais a zero nas faces que estiverem na superfície de um elemento, como ilustra a Figura 5.6, e, por consequência, as componentes de tensão correspondentes na face oposta também serão nulas. Assim, o material no ponto estará sujeito à tensão no plano (HIBBELER, 2010).

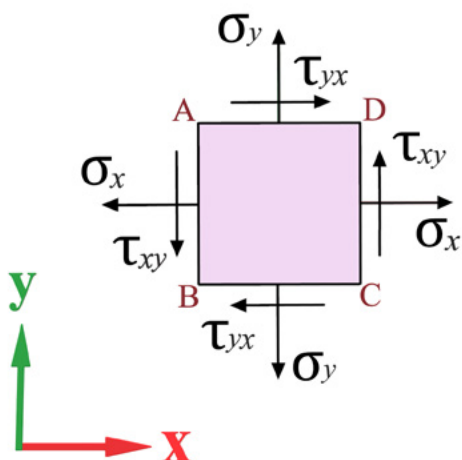
Figura 5.6 – Estado geral de tensão em um elemento cúbico simplificado em um plano.



Fonte: Adaptada de HIBBELER, 2010.

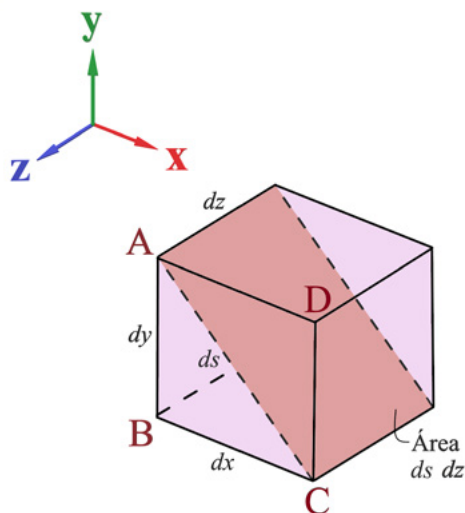
Nosso objetivo será encontrar uma equação da força por unidade de área que atue em uma superfície de uma seção com orientação $\vec{n}$ conhecida a partir de um sistema de coordenadas rotacionadas, como ilustram as Figuras 5.7, 5.8 e 5.9.

Figura 5.7 – Tensão de um elemento no estado plano de tensão.



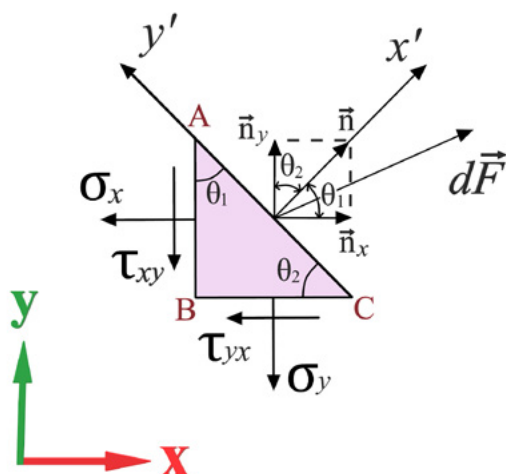
Fonte: Adaptada de KUNDU; COHEN, 2008.

Figura 5.8 – Vista tridimensional do corte no eixo y' de um elemento cúbico.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 5.9 – Balanço de força em um triângulo elementar ABC.



Fonte: Adaptada de KUNDU; COHEN, 2008.

Considere o equilíbrio de força em um triângulo elementar ABC , cujos lados $AB=dy$, $BC=dx$ e $AC=ds$ e a espessura do elemento na direção z será dz , como mostra a Figura 5.8. Se $d\vec{F}$ é a força na face seccionada, então um equilíbrio de forças na direção x fornece dF_x como:

$$dF_x = \sigma_x dy dz + \tau_{yx} dx dz \quad (5.14)$$

Dividindo os dois lados da Equação 5.14 por $ds dz$, temos que:

$$\frac{dF_x}{ds dz} = \frac{\sigma_x dy dz}{ds dz} + \frac{\tau_{yx} dx dz}{ds dz} \quad (5.15)$$

Simplificando o dz nos dois termos do segundo lado da igualdade e sabendo que $\frac{dy}{ds} = \cos \theta_1 = n_x$ e $\frac{dx}{ds} = \cos \theta_2 = n_y$, obtemos:

$$\frac{dF_x}{ds dz} = \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y \quad (5.16)$$

Substituindo $ds dz$ por dA , que representa a magnitude do elemento de área na superfície seccionada, a equação fica:

$$\frac{dF_x}{dA} = \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y \quad (5.17)$$

Ao multiplicar os dois lados da Equação 5.17 por dA , temos que:

$$dF_x = (\sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y) dA \quad (5.18)$$

Usando a convenção de somatório, podemos escrever $dF_x = (\sigma_{jx} n_j) dA$, onde j é somado em x e y , e o símbolo σ passa a representar tanto as tensões normais quanto as tangenciais. Um balanço de forças semelhante na direção do eixo y irá fornecer $dF_y = (\sigma_{jy} n_j) dA$. Generalizando para três dimensões, temos que:

$$dF = (\sigma_{ij} n_j) dA \quad (5.19)$$

Como o tensor tensão é simétrico, podemos estabelecer que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ (KUNDU; COHEN, 2008). Assim, a Equação 5.19 em notação vetorial é reescrita como:

$$d\vec{F} = \sigma \cdot \vec{n} dA \quad (5.20)$$

5.3 Quantidade de movimento linear para um volume de controle

Dada a complexidade da Equação 5.13, utilizaremos a Segunda Lei de Newton e o Teorema de Transporte de Reynolds para formular outra equação de força total agindo no volume de controle.

A Segunda Lei de Newton para um sistema de massa (m) foi apresentada na Equação 5.3, na qual a força resultante em um sistema é o produto da variação do momento (quantidade de movimento) em relação ao tempo. Considerando que a massa e a velocidade podem variar em diferentes pontos no sistema, a Segunda Lei de Newton fica:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \frac{d}{dt} \int_s \rho \vec{V} dV \quad (5.21)$$

Por meio da Equação 5.21, obtemos a soma de todas as forças externas que agem em um sistema em repouso ou se movendo à velocidade constante. Entretanto, na Mecânica dos Fluidos, é mais vantajoso trabalhar com volumes de controle do que com sistemas. Assim, por meio do Teorema de Transporte de Reynolds, vamos desenvolver uma nova equação mudando da formulação de sistema para a formulação de volume de controle.

No capítulo 2, a Equação 2.20 definiu o Teorema de Transporte de Reynolds para um volume de controle fixo, móvel e/ou deformável, conforme a equação:

$$\left(\frac{dB}{dt} \right)_s = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} b \rho \vec{V}_R \cdot \vec{n} dA$$

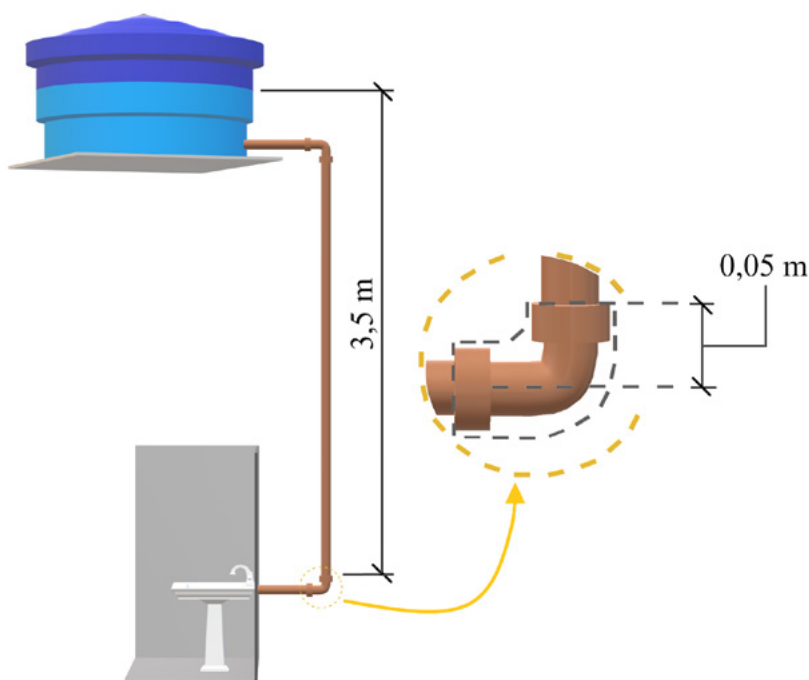
Considerando que o momento linear $m\vec{V}$ é a propriedade extensiva B , e que $\vec{V}$ é a propriedade intensiva b correspondente, temos que a equação geral da quantidade de momento será dada por:

$$\sum \vec{F} = \left(\frac{d m \vec{V}}{dt} \right)_s = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{V} dV + \int_{SC} \rho \vec{V} (\vec{V}_R \cdot \vec{n}) dA \quad (5.22)$$

A Equação 5.22 nos diz que a soma de todas as forças externas agindo em um volume de controle é dada pela taxa de variação no tempo do momento linear do conteúdo do volume de controle mais a taxa de escoamento do momento linear para fora da superfície de controle por escoamento de massa. Essa equação é válida para volumes de controle móveis, fixos ou deformáveis (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

Para exemplificar em qual situação pode ser aplicada a equação da quantidade de movimento linear, observe o esquema da Figura 5.10. Trata-se de uma instalação hidráulica que liga um reservatório, popularmente conhecido como caixa d'água, à torneira de uma pia. Essa instalação é composta de tubos de PVC de 50 mm de diâmetro e curvas de 90°, que permitem a mudança de direção do escoamento. Sabemos que o reservatório está a uma altura de 3,5 m da entrada do conector inferior e que a água escoar em regime permanente e uniforme a uma vazão mássica de 2 kg/s. Ademais, por simplicidade, vamos desprezar as perdas de carga e, a partir dos dados, calcular a força de ancoragem F_a na curva de 90° em destaque na Figura 5.10. Dados: $\rho_{\text{água}} = 1000 \text{ kg/m}^3$, 1 m.c.a. = 9806,65 Pa.

Figura 5.10 – Tubulação responsável por conduzir água para a torneira de um banheiro.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Resolução:

Primeiro vamos traçar um volume de controle que envolva a curva. Como ele é fixo, a velocidade relativa $\vec{V}_R$ será igual à velocidade absoluta $\vec{V}$, como vimos no capítulo 2.

No regime de escoamento permanente, as propriedades do fluido são consideradas constantes em relação ao tempo (ÇENGEL; CIMBALA, 2015), logo, a taxa de variação temporal do momento será zero. E como ele é uniforme, $\vec{V}$ pode ser substituída pela velocidade média $\vec{V}_{méd}$. Além disso, a área da superfície de controle (SC) é a área na qual o fluido escoar, isto é, a área da seção circular do tubo. Assim, a Equação 5.22 pode ser reescrita como:

$$\sum \vec{F} = 0 + \int_{A_c} \rho \vec{V}_{méd} (\vec{V}_{méd} \cdot \vec{n}) dA \quad (5.23)$$

No capítulo 3, a Equação 3.4 definiu a vazão mássica como: $\dot{m} = \rho V_{méd} A_c$. Assim, temos que:

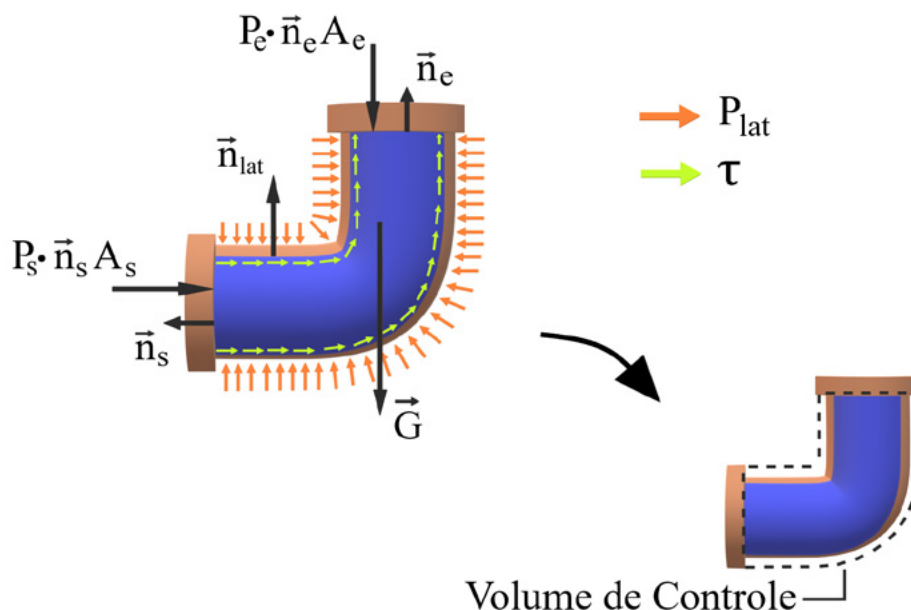
$$\sum \vec{F} = \int_{A_c} \rho \vec{V}_{méd} (\vec{V}_{méd} \cdot \vec{n}) dA = \rho V_{méd} A_c \vec{V}_{méd} = \dot{m} \vec{V}_{méd} \quad (5.24)$$

A Equação 5.24 fornece a taxa de escoamento do momento através de uma entrada ou saída uniforme em cada uma das seções. Como, no nosso exemplo, uma parte do fluido está saindo (s) e a outra entrando (e), devemos calcular a variação do momento.

$$\sum \vec{F} = (\dot{m} \vec{V}_{méd})_s - (\dot{m} \vec{V}_{méd})_e \quad (5.25)$$

Essa equação fornece uma relação para a força externa total que age no volume de controle. Contudo, o problema pede a força de ancoragem, que é a resultante das forças de contato da superfície sólida contra o fluido, composta por pressões laterais e tensões de cisalhamento sobre a área de contato. Por isso, vamos desenhar um diagrama de corpo livre (D.C.L.) para analisar todas as forças externas atuantes e, assim, fazer aparecer a força de ancoragem, como mostra a Figura 5.11.

Figura 5.11 – Forças externas atuando no volume de controle.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Na Figura 5.11, os versores $\hat{n}$ normais às seções são sempre desenhados com sentido para fora do volume de controle por convenção. Os vetores em laranja representam a força normal aplicada a cada elemento de área dA na superfície lateral do conector, ou seja, a pressão lateral, sendo que essa força é uma reação à força normal que o fluido aplica à parede do conector. Os vetores em verde representam a força tangencial aplicada a cada elemento de área dA na superfície lateral do conector, ou seja, a tensão de cisalhamento, e são uma reação à força tangencial que o fluido aplica à parede do conector.

A força de ancoragem $d\vec{F}_a$ em um elemento de área dA é dada pela soma da força normal e tangencial aplicadas à superfície lateral. A pressão é dada pelo produto contraído entre a força normal e a área, e a tensão de cisalhamento resulta do produto contraído entre a força de cisalhamento e a área. Assim, temos que:

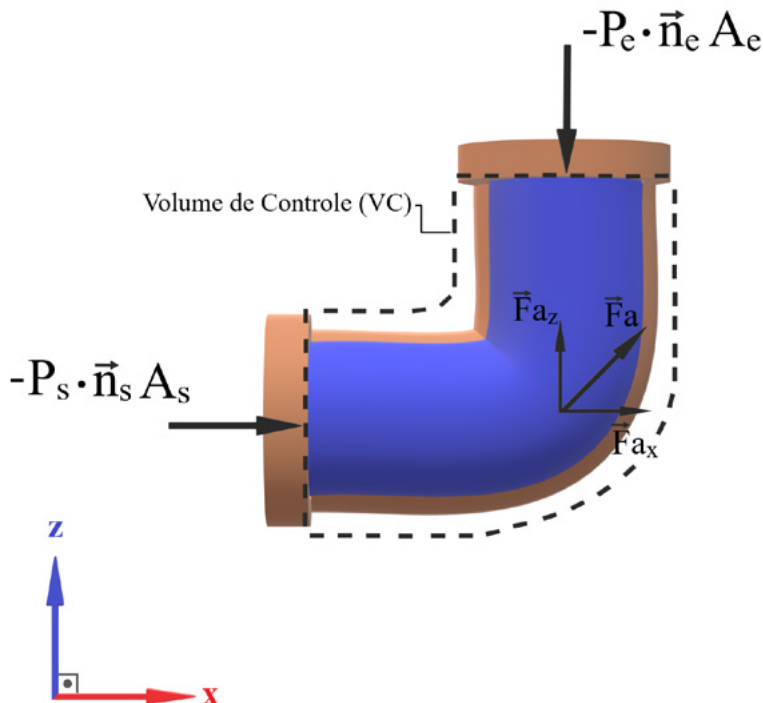
$$d\vec{F}_a = -P_{lat} \cdot \vec{n}_{lat} dA_{lat} + \tau \cdot \vec{n}_{lat} dA_{lat} \quad (5.26)$$

Integrando sobre toda a superfície lateral, obtemos:

$$\vec{F}_a = \int_{lat} -P_{lat} \cdot \vec{n}_{lat} dA_{lat} + \int_{lat} \tau \cdot \vec{n}_{lat} dA_{lat} \quad (5.27)$$

A Equação 5.27 fornece a força resultante das pressões e tensões de cisalhamento na superfície lateral, representada pela força de ancoragem $\vec{F}_a$. Com essa equação, a Figura 5.11 pode ser reduzida à Figura 5.12:

Figura 5.12 – Forças externas atuando no volume de controle com $\vec{F}_a$ simplificada.



Fonte: Elaborada pelos autores.

E, da Figura 5.12, temos que o somatório das forças externas atuantes no volume de controle será dado por:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_a + (-P_e \cdot \vec{n}_e A_e) + (-P_s \cdot \vec{n}_s A_s) + \vec{G} \quad (5.28)$$

Igualando a Equação 5.25 com a Equação 5.28, obtemos:

$$(\dot{m}\vec{V}_{méd})_s - (\dot{m}\vec{V}_{méd})_e = \vec{F}_a + (-P_e \cdot \vec{n}_e A_e) + (-P_s \cdot \vec{n}_s A_s) + \vec{G} \quad (5.29)$$

Isolando $\vec{F}_a$ obtemos:

$$\vec{F}_a = (\dot{m}\vec{V}_{méd})_s - (\dot{m}\vec{V}_{méd})_e + P_e \cdot \vec{n}_e A_e + P_s \cdot \vec{n}_s A_s - \vec{G} \quad (5.30)$$

A força peso $\vec{G}$ pode ser descoberta calculando o produto do peso específico da água pelo volume que ela ocupa, mais o produto do peso específico da curva pelo volume que ela ocupa. Contudo, diante das demais forças, a força peso não é significativa no cálculo e, por isso, vamos desprezar esse termo da Equação 5.30. Assim, temos:

$$\vec{F}_a = (\dot{m}\vec{V}_{méd})_s - (\dot{m}\vec{V}_{méd})_e + P_e \cdot \vec{n}_e A_e + P_s \cdot \vec{n}_s A_s \quad (5.31)$$

Com a Equação 5.31 estabelecida, podemos finalmente aplicar os dados fornecidos no exemplo e encontrar a força de ancoragem.

Como as áreas de saída e de entrada são iguais, as velocidades, também serão iguais.

$$A_e = A_s = A = \frac{\pi(0,05 \text{ m})^2}{4} = 1,96 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$



$$V_e = V_s = V = \frac{\dot{m}}{\rho A} = \frac{2 \text{ kg/s}}{(1000 \text{ kg/m}^3)(1,96 \times 10^{-3} \text{ m}^2)} = 1,02 \text{ m/s}$$

Não estamos considerando as perdas de carga, logo, a pressão na entrada e na saída será a pressão em metro coluna d'água.

$$P_e = 3,5 \text{ m.c.a.} = (3,5 \text{ m.c.a.}) \left(\frac{9806,56 \text{ Pa}}{1 \text{ m.c.a.}} \right) = 34,32 \text{ kPa}$$

$$P_s = 3,55 \text{ m.c.a.} = (3,55 \text{ m.c.a.}) \left(\frac{9806,56 \text{ Pa}}{1 \text{ m.c.a.}} \right) = 34,81 \text{ kPa}$$

Para descobrir $\vec{F}_a$, vamos primeiro calcular suas componentes $\vec{F}_{a,x}$ e $\vec{F}_{a,z}$ a partir da Equação 5.31.

$$\vec{F}_{a,x} = (\dot{m}\vec{V}_{\text{méd}})_s + P_s \cdot \vec{n}_s A_s$$

$$F_{a,x} = (2 \text{ kg/s})(-1,02 \text{ m/s}) + (34,81 \times 10^3 \text{ Pa})(-1)(1,96 \times 10^{-3} \text{ m}^2)$$

$$F_{a,x} = -70,27 \text{ N}$$

$$\vec{F}_{a,z} = -(\dot{m}\vec{V}_{\text{méd}})_e + P_e \cdot \vec{n}_e A_e$$

$$F_{a,z} = -(2 \text{ kg/s})(-1,02 \text{ m/s}) + (34,32 \times 10^3 \text{ Pa})(1)(1,96 \times 10^{-3} \text{ m}^2)$$

$$F_{a,z} = 69,31 \text{ N}$$

$$F_a = \sqrt{(-70,27 \text{ N})^2 + (69,31 \text{ N})^2} = 98,70 \text{ N}$$

O negativo da componente no eixo x indica que a força $\vec{F}_{a,x}$ aponta para o sentido oposto no qual foi desenhado.



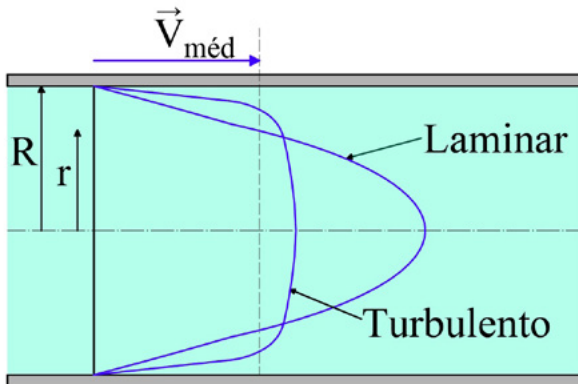
5.4 Fator de correção do fluxo de momento, β

No caso mais comum, do escoamento não ser uniforme, ou seja, a velocidade do fluido na entrada ou na saída não serem iguais à velocidade média, devemos aplicar um fator de correção adimensional β na integral da superfície de controle (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Assim, temos que a Equação 5.22, em um volume de controle fixo com várias entradas e saídas, fica:

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{V} dV + \sum_s \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_e \beta \dot{m} \vec{V} \quad (5.32)$$

Sendo que existe um valor de β para cada entrada e saída. Além disso, em um escoamento laminar, o perfil de velocidade sofre uma grande variação em relação à sua velocidade média. Já no escoamento turbulento, essa variação é pequena, como pode ser visto na Figura 5.13. Por isso, o valor de β é significativo no escoamento laminar e aproxima-se da unidade para escoamentos turbulentos (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

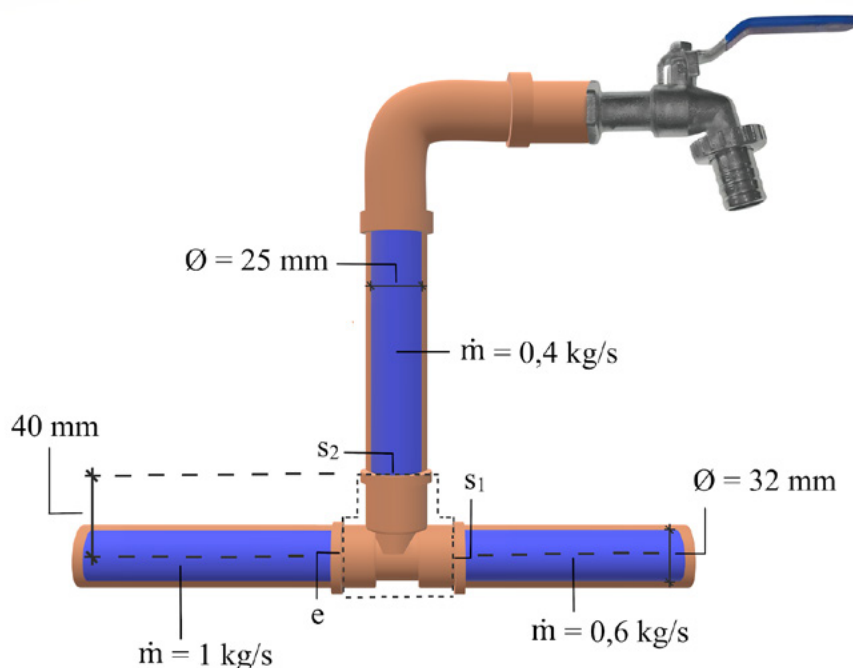
Figura 5.13 – Perfil de velocidade em uma seção transversal de um tubo para o escoamento laminar e turbulento totalmente desenvolvidos.



Fonte: Adaptada de ÇENGEL; CIMBALA, 2015.

No exemplo a seguir, o eixo horizontal do conector da tubulação da torneira do tanque de uma casa está a uma diferença de altura de 3 m do reservatório d'água. Considerando que o escoamento é permanente e a perda de carga até a entrada do conector é de 0,8 m, calculemos a força que o fluido exerce no conector. Dados: $\rho_{\text{água}} = 1000 \text{ kg/m}^3$, 1 m.c.a. = 9806,65 Pa; $\beta_e = \beta_{s1} = 1,02$ e $\beta_{s2} = 1,04$.

Figura 5.14 – Tubulação da torneira.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Resolução:

Fazendo as mesmas considerações que no exemplo anterior para o escoamento permanente e a partir da Equação 5.32, temos que:

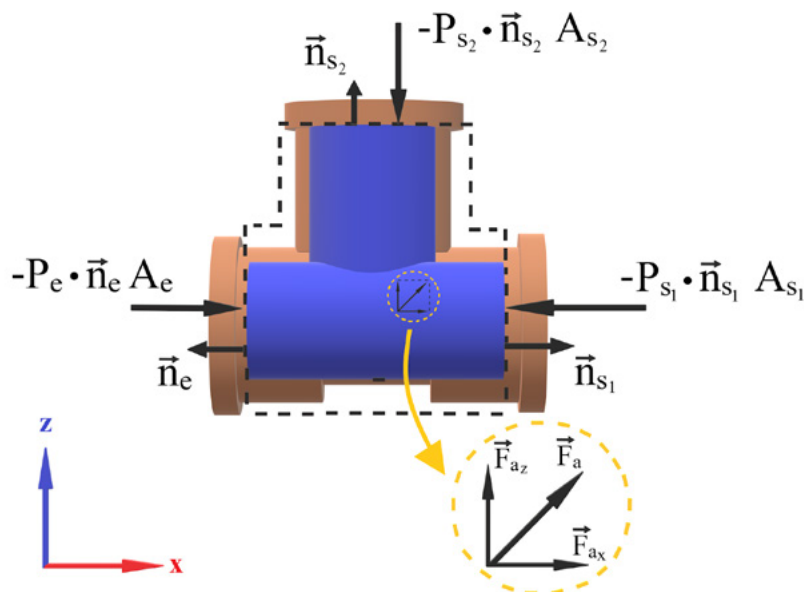
$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{V} dV + (\beta_{s1} \dot{m} \vec{V}_{méd,s1} + \beta_{s2} \dot{m} \vec{V}_{méd,s2}) - \beta_e \dot{m} \vec{V}_{méd,e} \quad (5.33)$$

$$\sum \vec{F} = 0 + (\beta_{s1} \dot{m} \vec{V}_{méd,s1} + \beta_{s2} \dot{m} \vec{V}_{méd,s2}) - \beta_e \dot{m} \vec{V}_{méd,e} \quad (5.34)$$

A força de ancoragem é a força de reação do fluido, ou seja, $\vec{F}_a = -\vec{F}_F$, assim, a partir do D.C.L. feito na Figura 5.15 e desconsiderando a força peso, temos que:

$$\sum \vec{F} = -\vec{F}_F - P_e \cdot \vec{n}_e A_e - P_{s1} \cdot \vec{n}_{s1} A_{s1} - P_{s2} \cdot \vec{n}_{s2} A_{s2} \quad (5.35)$$

Figura 5.15 – Forças atuantes.



Fonte: Elaborada pelos autores.

A força de ação que o fluido aplica na superfície é uma força interna. Já a força de reação que a superfície aplica no fluido (força de ancoragem) é uma força externa. Forças internas não interferem na quantidade de movimento, por isso, na Equação 5.35, tivemos que usar $-F_F$, apenas como uma forma de fazer aparecer a força do fluido reescrevendo F_a .

Combinando a Equação 5.34 com a Equação 5.35, temos:

$$\vec{F}_F = -[(\beta_{s1}\dot{m}\vec{V}_{s1} + \beta_{s2}\dot{m}\vec{V}_{s2}) - \beta_e\dot{m}\vec{V}_e + P_e \cdot \vec{n}_e A_e + P_{s2} \cdot \vec{n}_{s2} A_{s2} + P_{s1} \cdot \vec{n}_{s1} A_{s1}] \quad (5.36)$$

Com a Equação 5.36 estabelecida, vamos aplicar os dados fornecidos no exemplo e encontrar a força do fluido.

$$A_e = A_{s1} = \frac{\pi(0,032 \text{ m})^2}{4} = 8,04 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$V_e = \frac{\dot{m}}{\rho A} = \frac{1 \text{ kg/s}}{(1000 \text{ kg/m}^3)(8,04 \times 10^{-4} \text{ m}^2)} = 1,24 \text{ m/s}$$

$$V_{s1} = \frac{\dot{m}}{\rho A} = \frac{0,6 \text{ kg/s}}{(1000 \text{ kg/m}^3)(8,04 \times 10^{-4} \text{ m}^2)} = 0,75 \text{ m/s}$$

$$A_{s2} = \frac{\pi(0,025 \text{ m})^2}{4} = 4,91 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$V_{s2} = \frac{\dot{m}}{\rho A} = \frac{0,4 \text{ kg/s}}{(1000 \text{ kg/m}^3)(4,91 \times 10^{-4} \text{ m}^2)} = 0,81 \text{ m/s}$$

$$P_e = (3 \text{ m. c. a.} - 0,8 \text{ m. c. a.}) \left(\frac{9806,56 \text{ Pa}}{1 \text{ m. c. a.}} \right) = 21,57 \text{ kPa}$$

Para calcular a pressão nas saídas, deveria ser considerada a perda de carga localizada que ocorreu no conector. Contudo, como não nos foi fornecida essa informação, vamos considerar apenas as

cargas potenciais. Além disso, ocorreu uma perda de carga por atrito, que também não foi considerada.

$$P_{s1} = (3 \text{ m. c. a.} - 0,8 \text{ m. c. a.}) \left(\frac{9806,56 \text{ Pa}}{1 \text{ m. c. a.}} \right) = 21,57 \text{ kPa}$$

$$P_{s2} = (3 \text{ m. c. a.} - 0,8 \text{ m. c. a.} - 0,040 \text{ m. c. a.}) \left(\frac{9806,56 \text{ Pa}}{1 \text{ m. c. a.}} \right) = 21,18 \text{ kPa}$$

$$\vec{F}_{F,x} = -[\beta_{s1} \dot{m} \vec{V}_{s1} - \beta_e \dot{m} \vec{V}_e] + P_e \cdot \vec{n}_e A_e + P_{s1} \cdot \vec{n}_{s1} A_{s1}]$$

$$F_{F,x} = -[(1,02)(0,6 \text{ kg/s})(0,75 \text{ m/s}) - (1,02)(1 \text{ kg/s})(1,24 \text{ m/s}) + (21,57 \times 10^3 \text{ Pa})(-1)(8,04 \times 10^{-4} \text{ m}^2) + (21,57 \times 10^3 \text{ Pa})(1)(8,04 \times 10^{-4} \text{ m}^2)]$$

$$F_{F,x} = 0,81 \text{ N}$$

Pelo princípio da ação e reação, se $F_{F,x}$ é positiva, $F_{a,x}$ será negativa e apontará para o sentido oposto no qual foi desenhado.

$$\vec{F}_{F,z} = -[\beta_{s2} \dot{m} \vec{V}_{s2} + P_{s2} \cdot \vec{n}_{s2} A_{s2}]$$

$$F_{F,z} = -[(1,04)(0,4 \text{ kg/s})(0,81 \text{ m/s}) + (21,18 \times 10^3 \text{ Pa})(1)(4,91 \times 10^{-4} \text{ m}^2)]$$

$$F_{F,z} = -10,74 \text{ N}$$

Pelo princípio da ação e reação, se $\vec{F}_{F,z}$ é negativa, $\vec{F}_{a,z}$ será positiva e apontará para o mesmo sentido no qual foi desenhado.

$$F_F = \sqrt{(0,81 \text{ N})^2 + (-10,74 \text{ N})^2} = 10,77 \text{ N}$$



Referências

ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. **Mecânica dos fluidos**: fundamentos e aplicações. 3. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2015.

CREASE, R. P. **As grandes equações**: a história das fórmulas matemáticas mais importantes e os cientistas que as criaram. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2011.

HIBBELER, R. C. **Mecânica**: estática. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

KUNDU, P. K.; COHEN, I. M. **Fluid mechanics**. 4. ed. Burlington: Elsevier Inc, 2008.

MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. **Fundamentos da mecânica dos fluidos**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2004.

OLIVER, X.; SARACIBAR, C. A. de. **Continuum mechanics for engineers**: theory and problems. Translated by Ester Comellas. 2. ed. Barcelona: [s. n.], 2017. Disponível em: https://www.academia.edu/40510023/CONTINUUM_MECHANICS_FOR_ENGINEERS_THEORY_AND_PROBLEMS_Second_Edition. Acesso em: 10 maio 2020.

ANÁLISE DIMENSIONAL

Neste capítulo, serão discutidas a homogeneidade dimensional, as grandezas ou dimensões fundamentais e sua importância, aplicadas à equação de Bernoulli. Outrossim, será apresentado o conceito, a relevância e a aplicação dos números adimensionais como poderosa ferramenta no estudo da Mecânica dos Fluidos.

6.1 Homogeneidade dimensional

Antes de discutir homogeneidade dimensional, atentemo-nos aos conceitos de dimensão e de unidade. De acordo com Çengel e Cimbala (2015), qualquer quantidade física pode ser caracterizada por dimensões e a unidade é uma forma de atribuir um número a essas dimensões. Por exemplo, o tempo é uma dimensão medida em unidades de segundos.

Algumas dimensões básicas, como massa, comprimento, tempo e temperatura, são escolhidas como dimensões primárias ou fundamentais, enquanto outras, como velocidade, energia e volume, são expressas em termos de dimensões primárias e são chamadas de dimensões secundárias ou derivadas (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

Neste capítulo, as dimensões fundamentais utilizadas serão massa [M], comprimento [L] e tempo [T] ou, alternativamente, serão utilizadas força [F], comprimento [L] e tempo [T]. Observe que os colchetes [] indicam “dimensão de” e as iniciais [MLT] e [FLT] são siglas

para palavras em inglês: FLT [*Force, Length, Time*] e MLT [*Mass, Length, Time*].

A Lei da Homogeneidade Dimensional nos diz que “todo termo aditivo de uma equação deve ter as mesmas dimensões” (ÇENGEL; CIMBALA, 2015, p. 293), e, assim, garantimos coerência nos resultados da equação. Por exemplo: se estamos interessados em saber quantas canetas há em uma caixa na qual há canetas e lápis, deveremos somar todas as canetas, ou seja, não somaremos canetas e lápis.

Para verificarmos se uma equação está dimensionalmente homogênea, consideramos as dimensões fundamentais envolvidas no processo que se deseja analisar, pois elas possibilitam verificar se essa condição está sendo cumprida. A partir da escolha das grandezas fundamentais [FLT] ou [MLT], é possível combiná-las a fim de se obter todas as demais grandezas (grandezas derivadas). Para realizar a análise dimensional, primeiro nos atentemos ao exemplo 6.1.

Exemplo 6.1 – Expressando grandezas derivadas em termos de grandezas fundamentais

Sabendo que a unidade de medida, no sistema internacional (SI), da massa específica ρ é dada em quilograma por metro cúbico (kg/m^3), da velocidade V em metros por segundo (m/s), da viscosidade dinâmica μ em quilograma por metro segundos ($\text{kg/m}\cdot\text{s}$) e do diâmetro D em metros (m), expresse cada uma dessas variáveis em termos de grandezas fundamentais. Adotamos as dimensões [MLT] e [FLT].

Solução:

1º Passo: Colocar a massa específica ρ em termos de [MLT]. Pelo enunciado, sabemos que a unidade da massa específica é kg/m^3 . O termo kg corresponde a uma unidade de massa [M] e o

termo m^3 corresponde a uma unidade de comprimento $[L]$ elevado ao cubo. Assim, temos:

$$\rho = \frac{kg}{m^3} = \frac{[M]}{[L^3]} = [ML^{-3}] \quad (6.1)$$

2º Passo: Colocar a massa específica ρ em termos de $[FLT]$. A unidade da massa específica é kg/m^3 . O termo m^3 é colocado rapidamente na grandeza fundamental como $[L^3]$. Para o termo kg , devemos considerar a Segunda Lei de Newton.

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (6.2)$$

Isolando o termo m , de massa, cuja unidade é o kg , temos:

$$m = \frac{\vec{F}}{\vec{a}} \quad (6.3)$$

Força na grandeza fundamental é apenas $[F]$, mas a unidade da aceleração é m/s^2 (razão entre um comprimento $[L]$ e um tempo $[T]$ elevado ao quadrado).

$$\vec{a} = \frac{m}{s^2} = \frac{[L]}{[T^2]} = [LT^{-2}] \quad (6.4)$$

Dividimos a força pela aceleração e encontramos a massa em $[FLT]$.

$$m = \frac{[F]}{[LT^{-2}]} = [FL^{-1}T^2] \quad (6.5)$$

Desse modo, aplicam-se propriedades de potência. A massa específica em [FLT] é dada por:

$$\rho = \frac{kg}{m^3} = \frac{[FL^{-1}T^2]}{[L^3]} = [FL^{-1}L^{-3}T^2] = [FL^{-4}T^2] \quad (6.6)$$

3º Passo: Colocar a velocidade V em termos de [MLT] e [FLT]. A unidade de velocidade é m/s ou uma unidade de comprimento [L] por uma de tempo [T]. A diferença entre as grandezas [MLT] e [FLT] é que uma considera a massa e a outra, a força, mas, na unidade da velocidade, nenhuma delas aparece. Dessa forma, para os dois casos ela será dada por:

$$V = \frac{[L]}{[T]} = [LT^{-1}] \quad (6.7)$$

4º Passo: Colocar a viscosidade dinâmica μ em termos de [MLT]. A unidade de viscosidade dinâmica é kg/m·s. O termo kg é uma unidade massa [M], o m é uma unidade de comprimento [L] e o s é uma unidade de tempo [T].

$$\mu = \frac{kg}{m \cdot s} = \frac{[M]}{[LT]} = [M L^{-1}T^{-1}] \quad (6.8)$$

5º Passo: Colocar a viscosidade dinâmica μ em termos de [FLT]. A unidade de viscosidade dinâmica é kg/m·s. O termo kg em [FLT] já foi encontrado no segundo passo pela Equação 6.5. Desta forma:

$$\mu = \frac{kg}{m \cdot s} = \frac{[F L^{-1}T^2]}{[LT]} = [F L^{-1} L^{-1}T^2T^{-1}] = [F L^{-2}T] \quad (6.9)$$

6º Passo: Colocar o diâmetro D em termos de [MLT] e [FLT]. O diâmetro é igual nos dois casos, portanto, é apenas uma unidade de comprimento [L].

$$D=[L]$$

(6.10)

Resultados finais:

$$\rho=[ML^{-3}]=[FL^{-4}T^2]$$

$$V=[LT^{-1}]$$

$$\mu=[ML^{-1}T^{-1}]=[FL^{-2}T]$$

$$D=[L]$$

Assim, é possível expressar grandezas derivadas em termos de grandezas fundamentais. Então, utilizaremos dessa ferramenta para fazer a análise dimensional da equação de Bernoulli e poder comparar se cada termo da equação possui as mesmas dimensões fundamentais, garantindo, dessa forma, que a equação siga a lei da homogeneidade dimensional.

Exemplo 6.2 – Análise dimensional da equação de Bernoulli

Conforme visto no capítulo 4, a equação de Bernoulli pode ser dada por:

$$H=P+\frac{1}{2}\rho V^2+\rho gz$$

(6.11)

Onde H representa a carga total de energia; P é a pressão e representa a energia de pressão; $\frac{1}{2}\rho V^2$ representa a energia cinética;



ρ é a massa específica do fluido; V é a velocidade; e o termo $\rho g z$ representa a energia potencial, no qual g é a aceleração da gravidade e z é a cota a partir de um nível de referência.

A análise dimensional — em termos de $[MLT]$ — de cada parcela da equação de Bernoulli é dada a seguir:

$$[P] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{[MLT^{-2}]}{[L^2]} = [ML^{-1}T^{-2}] \quad (6.12)$$

$$\left[\frac{1}{2}\rho V^2\right] = [\rho][V][V] = \left[\frac{M}{L^3}\right]\left[\frac{L}{T}\right]\left[\frac{L}{T}\right] = [ML^{-1}T^{-2}] \quad (6.13)$$

$$\rho g z = [\rho][g][z] = \left[\frac{M}{L^3}\right]\left[\frac{L}{T^2}\right][L] = [ML^{-1}T^{-2}] \quad (6.14)$$

Como a dimensão de todas as parcelas do lado direito da equação de Bernoulli é dada por $[ML^{-1}T^{-2}]$, a equação segue a lei da homogeneidade dimensional, e a parcela H de carga total de energia, do lado esquerdo da equação obrigatoriamente também deverá ser dada por $[ML^{-1}T^{-2}]$.

6.2 Grandezas adimensionais

Se dividirmos cada termo de uma equação que segue a lei da homogeneidade por variáveis e constantes de mesma dimensão, teremos uma equação adimensional (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Em conformidade com Brunetti (2012), uma grandeza é adimensional quando sua análise dimensional resulta em $[M^0L^0T^0]$ ou $[F^0L^0T^0]$, em outras palavras, não possui dimensão. Da mesma forma, conforme Brunetti (2012), a grande vantagem de utilizar números adimensionais é que eles englobam as variáveis de um fenômeno. Assim, não

há necessidade de manusear as variáveis em si, apenas os números adimensionais para estudar os fenômenos físicos.

O número de Euler, por exemplo, é um parâmetro adimensional empregado para estudar as perdas de energia de um fluido em movimento e relaciona a variação de pressão ΔP com a massa específica ρ e a velocidade V do fluido. Desse modo, por meio de sua equação, que será apresentada a seguir, sabemos que ΔP é diretamente proporcional a ρ e à V^2 , ou seja, se o módulo da variação de pressão aumentar, o módulo da massa específica e o da velocidade ao quadrado também aumentam. Do mesmo modo, a massa específica do fluido é inversamente proporcional à velocidade ao quadrado, ou seja, se a velocidade ao quadrado aumentar, a massa específica do fluido diminuirá. Portanto, o número adimensional já fornece as relações entre as variáveis envolvidas no fenômeno físico.

A obtenção e a análise de números adimensionais agilizam, em tempo e investimento, o número de experimentos feitos para estudar fenômenos físicos devido à utilização de apenas um teorema para substituir diversas ferramentas matemáticas, como gráficos, para encontrar a associação entre os parâmetros (BRUNETTI, 2012).

6.3 As principais grandezas da Mecânica dos Fluidos

As grandezas que aparecem com mais frequência na Mecânica dos Fluidos são: massa específica ρ , velocidade característica V , comprimento característico L , viscosidade dinâmica μ , viscosidade cinemática ν , variação de pressão ΔP , aceleração da gravidade g e velocidade do som c .

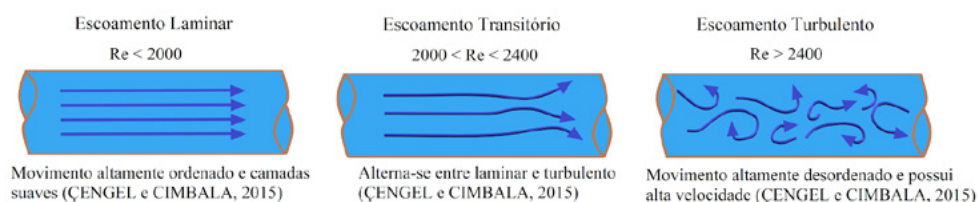
As principais grandezas adimensionais utilizadas na Mecânica dos Fluidos, e que recebem os nomes de estudiosos que contribuíram para o desenvolvimento da ciência e engenharia, são: o número de Reynolds (Re), o número de Euler (Eu), o número de Froude (Fr) e o número de Mach (Ma).

Segundo Çengel e Cimbala (2015), o número de Reynolds (Re), dado pela Equação 6.15, é o número adimensional mais importante da Mecânica dos Fluidos.

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{V D}{\nu} \quad (6.15)$$

Em concordância com Brunetti (2012), por meio do uso do número de Reynolds, é possível classificar o escoamento de um fluido em laminar, transitório ou turbulento, conforme a Figura 6.1.

Figura 6.1 – Regime de escoamento laminar, transitório e turbulento de um fluido conforme a classificação com o número de Reynolds (Re) e algumas de suas características.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Osborne Reynolds (1842-1912) foi um engenheiro inglês que investigou o escoamento em tubos e desenvolveu equações para escoamento de fluido viscoso com base nas velocidades médias (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

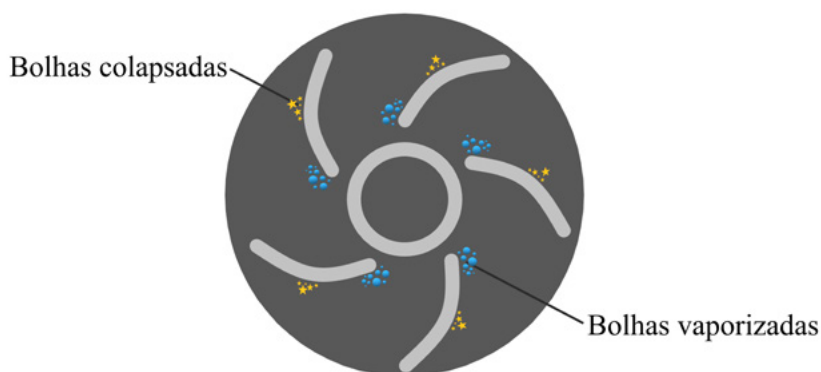
O número de Euler (Eu), dado pela Equação 6.16, conhecido também como número de cavitação (quando a pressão de referência é pressão de vapor), é um adimensional também empregado para estudar e, assim, evitar o fenômeno de cavitação que pode ocorrer no rotor de bombas (CONNOR, 2020).

$$Eu = \frac{\Delta P}{\rho V^2}$$

(6.16)

Na região de uma bomba centrífuga (Figura 6.2), a pressão do fluido pode chegar à pressão de vapor, formar bolhas de vapor e provocar microvibrações e perturbações capazes de remover materiais dos componentes mecânicos próximos (CAMARGO, 2018). A formação de bolhas de vapor em rotor de bomba centrífuga pode levar à ocorrência do processo de cavitação, causando danos aos componentes mecânicos.

Figura 6.2 – Regiões de formação de bolhas de vapor em rotor de bombas centrífugas.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Leonhard Euler (1797-1783) foi um matemático suíço e colega de Daniel Bernoulli que formulou as equações de movimento dos fluidos e introduziu o conceito da máquina centrífuga (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

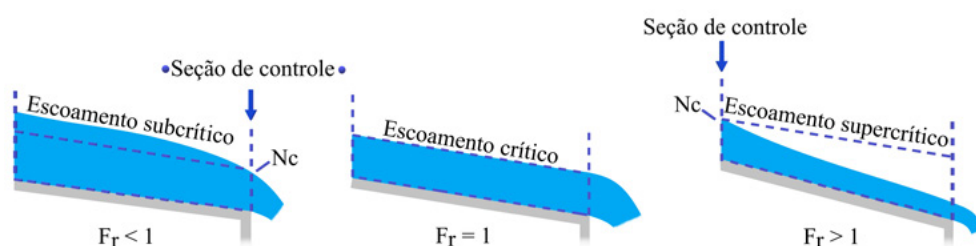
O número de Froude (Fr), dado pela Equação 6.17, tem um importante papel na hidráulica dos escoamentos livres, pois ele relaciona as duas principais forças que regem esse tipo de escoamento: a força de inércia e a força gravitacional (REIS, 2016).

$$Fr^2 = \frac{V^2}{gL}$$

(6.17)

O número de Froude classifica o regime de escoamento em subcrítico, crítico e supercrítico, conforme a Figura 6.3 (REIS, 2016).

Figura 6.3 – Regimes de escoamento subcrítico, crítico e supercrítico, classificação dada por meio do número de Froude (Fr), com o nível crítico N_c .



Fonte: Adaptada de BAPTISTA; LARA, 2016.

William Froude (1810-1879) foi um engenheiro inglês que desenvolveu métodos de modelagem naval e a transferência da resistência de onda e de camada limite do modelo ao protótipo (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

O número de Mach (Ma), dado pela Equação 6.18, expressa a relação entre a velocidade do fluido numa seção e a velocidade do som na mesma seção (BRUNETTI, 2012).

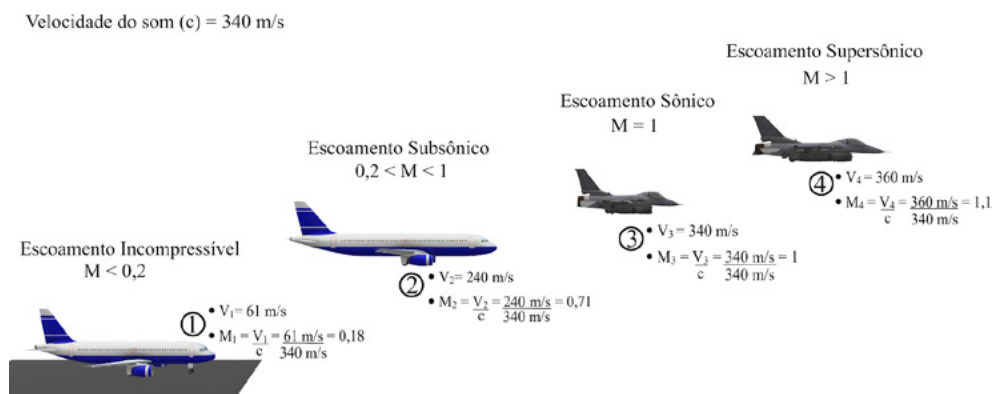
$$Ma = \frac{V}{c}$$

(6.18)

O número de Mach permite classificar os escoamentos nos seguintes tipos: escoamento incompressível, escoamento subsônico,

escoamento sônico e escoamento supersônico (Figura 6.4), sendo muito útil na técnica aeronáutica (BRUNETTI, 2012).

Figura 6.4 – Classificação do escoamento do ar pelo número de Mach (Ma) de acordo com as perturbações que as aeronaves provocam por causa de suas velocidades.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Ernst Mach (1838-1916) foi um físico austríaco que descobriu que os corpos com velocidade acima da velocidade do som alteram drasticamente as propriedades do fluido. Suas ideias tiveram grande influência sobre o pensamento do século XX, tanto em física quanto em filosofia, e ainda influenciam o desenvolvimento da teoria da relatividade de Einstein (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

6.4 Método das variáveis repetidas: teorema Pi de Buckingham

Reconhecendo o poder e a utilidade da análise dimensional, apresentamos um método para gerar parâmetros adimensionais: o método das variáveis repetidas, conhecido também como teorema Pi

de Buckingham ou teorema dos Π 's, no qual a letra grega Π indica o parâmetro adimensional.

O teorema de Buckingham relaciona, de modo apropriado, uma variável adequadamente adimensionalizada de interesse (por exemplo, o arrasto) com outras variáveis adequadamente adimensionalizadas (por exemplo, os números de Reynolds, a razão de rugosidade e o número de Mach) (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

Pelo teorema, uma equação dimensionalmente homogênea, que envolve k variáveis, pode ser reduzida a uma relação entre $k - r$ produtos adimensionais independentes, sendo r o número mínimo de dimensões de referência necessário para descrever as variáveis (MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004).

Apesar de existir vários métodos desenvolvidos com a finalidade de gerar parâmetros adimensionais, o método popularizado por Edgar Buckingham (1867-1940), publicado pelo cientista russo Dimitri Riabouchinsky (1882-1962) em 1911 (ÇENGEL; CIMBALA, 2015), é o mais conhecido e simples.

Assim como acontece com a maioria dos procedimentos novos, a melhor maneira de aprender é por meio do exemplo e da prática. Por isso, atentemo-nos ao exemplo 6.3.

Exemplo 6.3 – Aplicando o teorema dos Π 's

O número de Reynolds é um adimensional muito importante na Mecânica dos Fluidos porque relaciona as forças inerciais às forças viscosas de um fluido (CONNOR, 2020). Dessa forma, ele permite a classificação dos regimes de escoamento de fluidos em laminar, transitório ou turbulento. Sabendo que a massa específica ρ , a velocidade V , a viscosidade dinâmica do fluido μ e o diâmetro D do tubo influenciam nas características do escoamento, determine a equação do número de Reynolds por meio do teorema dos Π 's.

Solução:

1º Passo: Identificar as variáveis envolvidas no fenômeno. Sabemos, pelo enunciado, que o número de Reynolds contém variáveis como massa específica ρ , velocidade V , viscosidade dinâmica μ e diâmetro D . Portanto, são quatro variáveis que devem ser levadas em conta ($n = 4$), sendo Reynolds um número adimensional resultante da combinação delas.

2º Passo: Colocar as variáveis em termos de grandezas fundamentais. Aqui foi adotado o FLT.

$$\rho = [F L^{-4} T^2] \quad (6.19)$$

$$V = [L T^{-1}] \quad (6.20)$$

$$\mu = [F L^{-2} T] \quad (6.21)$$

$$D = L \quad (6.22)$$

3º Passo: Identificar a quantidade de grandezas fundamentais que aparecem nas variáveis. No caso, aparecem as três, $[F]$, $[L]$ e o $[T]$ ($r = 3$).

4º Passo: Definir o número m de adimensionais ou termos Π . A quantidade de números adimensionais que serão formados é definida pela diferença entre a quantidade de variáveis do fenômeno e a quantidade de grandezas fundamentais presentes.

$$m = n - r = 4 - 3 = 1 \quad (6.23)$$

Conforme a Equação 6.23, temos apenas um número adimensional ou um termo Π a ser calculado.

5º Passo: Definir a base para a construção do termo Π . Devemos escolher, entre as variáveis, três que serão usadas como base e uma que será complementar. Aqui são escolhidas três variáveis como



base, pois são três as grandezas fundamentais que aparecem, ρ , V , D , visto que, segundo Brunetti (2012), a maioria dos adimensionais conhecidos tem origem nelas. Portanto, serão escolhidos como base ρ , V , D e a variável complementar será o μ .

6º Passo: Construção do termo Π . Pela regra do teorema, o Π é igual ao produto entre os termos da base (cada um elevado a uma variável diferente) e a variável complementar.

$$\Pi = \rho_1^\alpha V_2^\alpha D_3^\alpha \mu \quad (6.24)$$

7º Passo: Resolução do termo Π . Colocamos cada variável da Equação 6.24 em termos de grandezas fundamentais, ou seja, substituímos as equações 6.19, 6.20, 6.21 e 6.22 na Equação 6.24. Assim, temos:

$$\Pi = [FL^{-4}T^2]^{\alpha_1} [LT^{-1}]^{\alpha_2} [L]^{\alpha_3} [FL^{-2}T] \quad (6.25)$$

Também pelo teorema, devemos igualar a Equação 6.25 a $F^0L^0T^0$, pois buscamos deixar todos os termos da equação sem dimensão e fatores elevados a zero resultam em 1 que é um adimensional puro. Temos então:

$$[FL^{-4}T^2]^{\alpha_1} [LT^{-1}]^{\alpha_2} [L]^{\alpha_3} [FL^{-2}T] = [F^0L^0T^0] \quad (6.26)$$

Aplicamos a distributiva nos expoentes.

$$[F^{\alpha_1}L^{-4\alpha_1}T^{2\alpha_1}] [L^{\alpha_2}T^{-\alpha_2}] [L^{\alpha_3}] [FL^{-2}T] = [F^0L^0T^0] \quad (6.27)$$

Ordenamos os termos, de acordo com as grandezas fundamentais, da seguinte forma:

$$[F^{\alpha_1} F] [L^{-4\alpha_1} L^{\alpha_2} L^{\alpha_3} L^{-2}] [T^{2\alpha_1} T^{-\alpha_2} T] = [F^0 L^0 T^0] \quad (6.28)$$

Utilizamos o fator comum em evidência nos expoentes.

$$[F]^{\alpha_1+1} [L]^{-4\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-2} [T]^{2\alpha_1-\alpha_2+1} = [F^0 L^0 T^0] \quad (6.29)$$

A partir dos expoentes da Equação 6.29, montamos um sistema para encontrar o valor de cada termo α da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 1 = 0 \\ -4\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 2 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + 1 = 0 \end{cases} \quad (6.30)$$

O sistema resulta em:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases} \quad (6.31)$$

Substituindo, na Equação 6.24, os valores de α encontrados por meio do sistema, temos:

$$\Pi = \rho^{-1} V^{-1} D^{-1} \mu = \frac{\mu}{\rho V D} \quad (6.32)$$

Aqui é importante verificarmos se essa configuração de variáveis, dada pelo parâmetro Π , fornece, de fato, um adimensional, o que é feito substituindo cada variável por sua unidade de medida e simplificando os seus termos semelhantes.

Como o número de Reynolds é adimensional, se os seus termos forem invertidos, ele continua sem medidas. Então:

$$\Pi = \frac{1}{Re} \rightarrow \frac{\mu}{\rho V D} = \frac{1}{Re} \quad (6.33)$$

Por conseguinte, o número de Reynolds resulta em:

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \quad (6.34)$$

6.5 Considerações sobre a análise dimensional e o teorema dos Π 's

Para uma equação ser verdadeira, é necessário que todas as suas parcelas apresentem as mesmas unidades de medida, ou seja, quando elas forem expressas em termos de dimensões fundamentais, devem ter a mesma notação. As grandezas e suas unidades podem ser expressas por meios de três grandezas ou dimensões fundamentais: Massa, Comprimento e Tempo [MLT] ou Força, Comprimento e Tempo [FLT]. Em conformidade, está a equação de Bernoulli, pois cada uma de suas partes apresenta grandeza igual a $[ML^{-1}T^{-2}]$. Assim, para apresentar qualquer unidade em dimensões fundamentais, um passo a passo deve ser seguido.

Uma grandeza é adimensional quando sua análise dimensional resulta em $[M^0L^0T^0]$. Os números adimensionais são muito importantes porque eles representam a relação entre as variáveis envolvidas em um fenômeno físico de modo que eles permitam analisar se as variáveis são direta ou inversamente proporcionais. Obter os números adimensionais pelo teorema, facilita o estudo e a compreensão dos fenômenos estudados.

Portanto, o teorema Pi de Buckingham é uma ferramenta poderosa, pois, por meio dela, utilizando a “receita”, podem ser adimensionalizados os termos de uma equação, resultando na obtenção dos parâmetros adimensionais utilizados, por exemplo, para a classificação do escoamento, como é o caso do número de Reynolds. O teorema precisa ser aplicado da maneira correta, sempre pensando no resultado esperado, para que ele seja efetivo.

Referências

BAPTISTA, M.; LARA, M. **Fundamentos de engenharia hidráulica**. 4. ed. Belo Horizonte: UFMG, 2016.

BRUNETTI, F. **Mecânica dos fluidos**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

CAMARGO, M. O que é cavitação? **Instituto de Engenharia**, São Paulo, 7 ago. 2018. Disponível em: <https://www.institutodeengenharia.org.br/site/2018/08/07/o-que-e-cavitacao/>. Acesso em: 22 jul. 2020.

ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. **Mecânica dos fluidos: fundamentos e aplicações**. 3. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2015.

CONNOR, N. O que é número de cavitação – definição. **Thermal Engineering**, [s. l.], 13 nov. 2019. Disponível em: <https://www.thermal-engineering.org/pt-br/o-que-e-o-numero-de-cavitacao-definicao/>. Acesso em: 22 jul. 2020.

CONNOR, N. O que é a fórmula do número de Reynolds – definição. **Thermal Engineering**, [s. l.], 1 fev. 2020. Disponível em: <https://www.thermal-engineering.org/pt-br/o-que-e-a-formula-de-numero-de-reynolds-definicao/>. Acesso em: 22 jul. 2020.

MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. **Fundamentos da mecânica dos fluidos**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2004.

REIS, F. Número de Froude e energia específica. **HidroMundo**, [s. l.], 2016. Disponível em: <http://www.hidromundo.com.br/numero-de-froude-e-energia-especifica/>. Acesso em: 22 jul. 2020.

CONVERSANDO COM OS AUTORES

Dedicamos o espaço deste capítulo para conversar com você, leitor, por meio dos nossos relatos sobre o processo de elaboração desta obra por autores discentes e docentes e as nossas expectativas quanto ao uso do material.

Alexandre Gimenez Monge

Estudante do curso de Engenharia Civil da UFGD

A participação na elaboração desta obra me proporcionou diversos aprendizados e expectativas sobre o seu uso. Em relação aos aprendizados, notei grande diferença entre estudar o assunto na faculdade, durante a disciplina de Mecânica dos Fluidos I, e desenvolver textos explicando os seus conceitos. Dessa maneira, como em qualquer trabalho acadêmico, a necessidade do escritor de se colocar no lugar do leitor foi evidenciada, pois, para a pessoa que tem acesso ao conteúdo poder compreender os conceitos e ideias, é necessária uma boa escolha de palavras e o domínio do conteúdo. Passei a compreender com mais rapidez os assuntos de Mecânica dos Fluidos, uma vez que o tempo e a prática oferecem familiaridade com o tema. Ao mesmo tempo, a importância das citações e das referências tornou-se clara quando percebi o papel das normas para garantir que não houvesse plágio, mas a transmissão de argumentos e conhecimentos embasados em estudos teóricos e acadêmicos.

Ao mesmo tempo, um dever que eu não aguardava, mas que me trouxe um ótimo aprendizado e que, com certeza, aplicarei em trabalhos acadêmicos posteriores, foi a elaboração de figuras originais para a obra, atividade que descobri ser muito interessante devido à liberdade existente durante o processo desde que haja fundamentação. As figuras foram elaboradas visando representar situações que auxiliem no entendimento dos temas apresentados, e proporcionaram uma relação mais próxima com programas de criação e edição, como o Paint 3D e o AutoCad, o que tornou a tarefa descomplicada.

Quanto às minhas expectativas sobre o uso deste material, espero que haja o entendimento das ideias contidas em cada parágrafo por parte do leitor e que os discentes de Mecânica dos Fluidos tenham um melhor desempenho na disciplina.

Augusto Salomão Bornschlegell

Professor do curso de Engenharia Mecânica da UFGD

Doutor em Engenharia Mecânica [UVHC, França]

Agradeço à professora Lôide pelo convite em trabalhar neste projeto, uma iniciativa inovadora que fortalece os conceitos dos envolvidos ao mesmo tempo que gera um material com linguagem mais próximo ao dos estudantes. Vários foram os desafios. Chegamos neste resultado graças ao empenho e à dedicação de cada um dos estudantes e graças à condução cuidadosa da professora Lôide. Externo também meus agradecimentos aos revisores pelas valiosas contribuições. Acredito que este resultado parcial motive a continuidade deste projeto e que inspire outros colegas a seguirem o mesmo caminho.

Janaina Nobre de Oliveira

Estudante do curso de Engenharia Civil da UFGD

A construção desta obra foi um desafio dividido em duas etapas: superar a falta de domínio do conteúdo e aprender a melhor forma de transmitir o conhecimento adquirido. Acredito que, de certa forma, nós vencemos esse desafio. Vencemos ao ler repetidas vezes a matéria, ao pesquisar com dedicação exemplos objetivos e de fácil entendimento para inseri-los no texto, ao escrever cada capítulo focando em sanar as principais dúvidas dos estudantes. Contudo, o tempo já provou que o conhecimento é um corpo em eterna expansão e sua transmissão sempre pode ser melhorada. Sabendo disso, me sinto grata por dizer que o meu próprio conhecimento e a minha capacidade em transmiti-lo aumentaram graças à oportunidade de fazer parte desse projeto.

Espero que os futuros leitores possam usar este livro como uma ferramenta de auxílio nessa eterna transmissão e compreensão dos conhecimentos ligados à Mecânica dos Fluidos.

Jorge Luis Alves Alencar

Estudante do curso de Engenharia Civil da UFGD

Para mim, foi um privilégio muito grande participar deste projeto. Além do aprendizado pessoal de poder estar em contato profundo com os assuntos de mecânica dos fluidos, também foi possível entrar no imaginário dos alunos iniciantes dos cursos de engenharia e vivenciar suas dificuldades. Nosso desafio foi desmistificar alguns assuntos complexos, explicando-os da maneira mais clara possível para fazer com que o aluno consiga relacionar os conteúdos da mecânica dos fluidos com os temas de cálculo diferencial e da álgebra e, mais ainda, com situações práticas da vida de um engenheiro. Que este conteúdo ajude os futuros engenheiros a desenvolverem suas habilidades e

conhecimentos de forma que consigam chegar mais longe em suas vidas acadêmicas e profissionais.

José Emanuel da Silva Montiel

Bacharel em Engenharia Civil pela UFGD

Mestrando em Engenharia de Construção Civil e Urbana pela USP

Quando escolhi Engenharia Civil como carreira, pensava em eternizar o meu conhecimento em construções que mudariam a vida das pessoas. Com o passar dos anos e com as experiências com monitorias, passei a compreender que existe outra forma de ficar para sempre marcado na vida das pessoas: por meio de ensinamentos.

A experiência que tive ao colaborar na elaboração deste livro foi muito enriquecedora. Posso afirmar, com certeza, que este livro, como texto inicial, será de grande ajuda para aqueles que procuram começar seus estudos em Mecânica dos Fluidos.

Agradeço à professora Dra. Lôide Angelini Sobrinha pela iniciativa deste projeto e pelo convite para fazer parte dele. Agradeço também ao professor Dr. Augusto Salomão Bornschlegell e aos demais colegas pela contribuição para a elaboração deste material.

José Mateus Oviedo do Nascimento

Estudante do curso de Engenharia Civil da UFGD

A educação necessita de urgentes formas de inclusão no aprendizado e da ação dos estudantes para tal. Participar do projeto deste livro foi uma experiência de “pôr a mão na massa” em prol de facilitar a compreensão dos estudantes sobre conceitos complexos não apenas por meio de cálculos ou dimensionamentos, mas também a partir da aplicação do conhecimento ao mundo material, ao que chamamos

de “vida real”. O mais importante é saber que o conteúdo desta obra pode auxiliar a melhorar o desempenho dos alunos na disciplina de Mecânica dos Fluidos, por isso é muito belo fazer algo em prol de pessoas que estão tendo a mesma vivência que você. É uma conexão muito construtiva.

Lucas Yasutoshi Negrete Bomura

Bacharel em Engenharia Civil (UFGD) e estudante do curso de Matemática da UFGD

O projeto de elaboração desta obra contou inicialmente com a minha colaboração em conjunto com José Emanuel da Silva Montiel e de Jorge Luis Alves Alencar. Sob orientação da professora Lôide, nós três elaboramos o primeiro esboço desta obra, com pouquíssimas figuras e um texto bem enxuto. Posteriormente, após o José Emanuel e eu concluirmos nosso curso de graduação em Engenharia Civil, os novos membros da equipe Alexandre e Janaina realizaram um belíssimo trabalho de aprimoramento do texto, além da elaboração de diversas ilustrações. Meu desafio final foi converter toda a obra para a linguagem de editoração LaTeX, um trabalho com o qual tive certa dificuldade no início devido à pouca experiência que tinha com o sistema. Felizmente, foi possível superar todas as dificuldades e concluir o presente trabalho. Espero que o livro proporcione uma boa ferramenta de auxílio aos estudantes que o utilizarem e agradeço previamente aos que elaborarão sugestões e críticas construtivas para as próximas edições.

Lôide Angelini Sobrinha [Coordenadora da obra]

Professora do curso de Engenharia Civil da UFGD

Doutora em Engenharia Hidráulica e Saneamento [EESC/USP]

A elaboração desta obra foi muito prazerosa, primeiro, por poder contribuir com a formação de estudantes em Mecânica dos Fluidos, conteúdo considerado como básico para todas as engenharias pelas Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia, conforme a Resolução CNE/CES n. 1, de 26 de março de 2021, e tido como de difícil compreensão pela maioria dos estudantes; e segundo, por fomentar o processo de ensino-aprendizado dos estudantes envolvidos neste trabalho, uma vez que, no processo de elaboração, eles desenvolveram grande parte das imagens a partir dos conceitos apresentados no texto e tiveram a oportunidade de aprimorar a sua relação com a escrita e a comunicação.

Espero que o conteúdo desta obra auxilie os leitores no estudo da Mecânica de Fluidos e que professores, estudantes e leitores possam contribuir com sugestões de melhorias.

SOBRE OS AUTORES

Alexandre Gimenez Monge

Estudante do curso de Engenharia Civil da UFGD.

Augusto Salomão Bornschlegell

Professor do curso de Engenharia Mecânica da UFGD. Doutor em Engenharia Mecânica pela Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis [UVHC, França].

Janaina Nobre de Oliveira

Estudante do curso de Engenharia Civil da UFGD.

Jorge Luis Alves Alencar

Bacharel em Engenharia Civil pela UFGD.

José Emanuel da Silva Montiel

Bacharel em Engenharia Civil pela UFGD. Mestrando em Engenharia de Construção Civil e Urbana pela USP.

José Mateus Oviedo do Nascimento

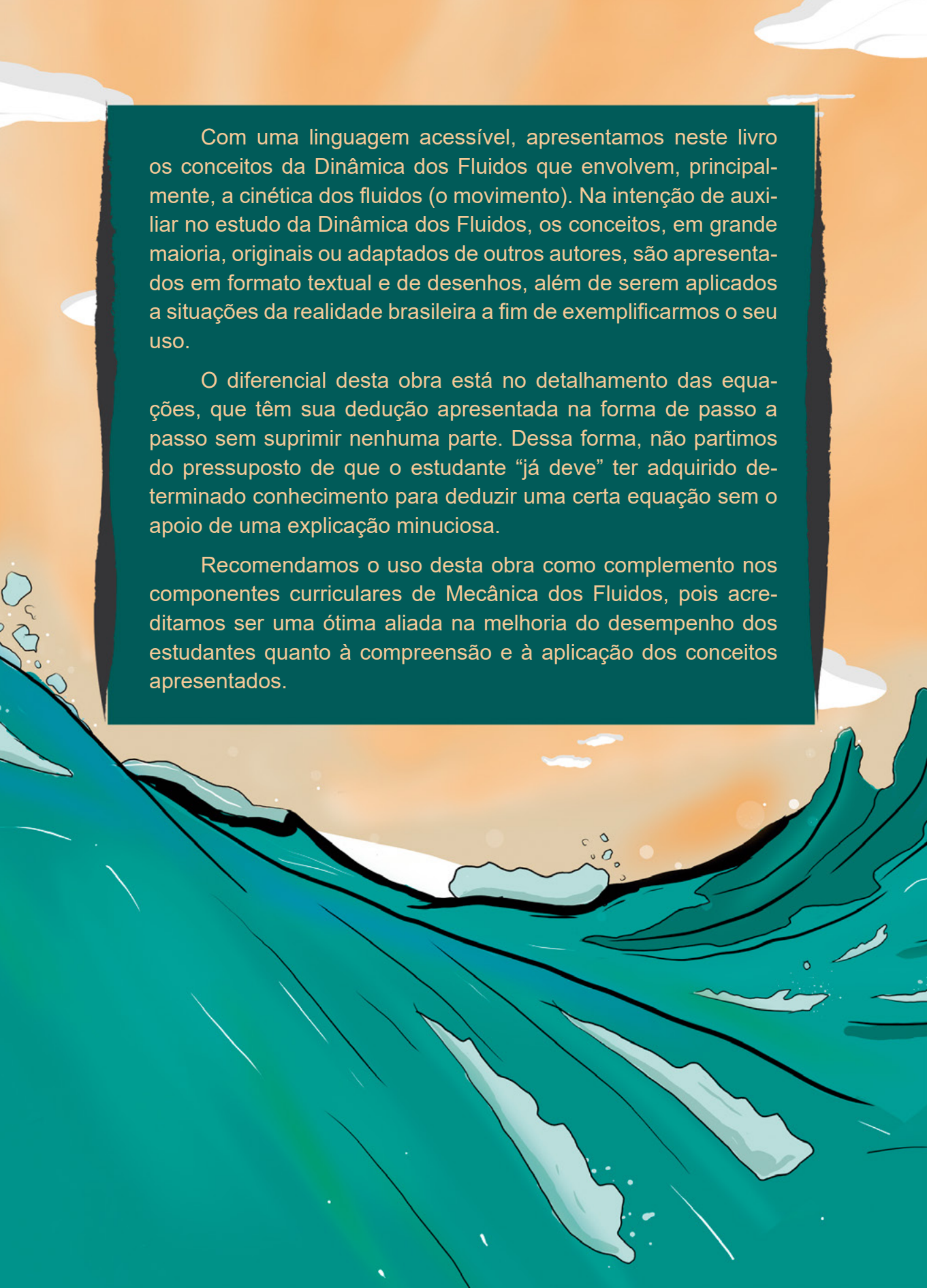
Bacharel em Engenharia Civil pela UFGD.

Lôide Angelini Sobrinha

Professora do curso de Engenharia Civil da Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD). Doutora em Engenharia Hidráulica e Saneamento pela Escola de Engenharia de São Carlos (EESC) da Universidade de São Paulo (USP).

Lucas Yasutoshi Negrete Bomura

Bacharel em Engenharia Civil pela UFGD. Estudante do curso de Matemática da UFGD.



Com uma linguagem acessível, apresentamos neste livro os conceitos da Dinâmica dos Fluidos que envolvem, principalmente, a cinética dos fluidos (o movimento). Na intenção de auxiliar no estudo da Dinâmica dos Fluidos, os conceitos, em grande maioria, originais ou adaptados de outros autores, são apresentados em formato textual e de desenhos, além de serem aplicados a situações da realidade brasileira a fim de exemplificarmos o seu uso.

O diferencial desta obra está no detalhamento das equações, que têm sua dedução apresentada na forma de passo a passo sem suprimir nenhuma parte. Dessa forma, não partimos do pressuposto de que o estudante “já deve” ter adquirido determinado conhecimento para deduzir uma certa equação sem o apoio de uma explicação minuciosa.

Recomendamos o uso desta obra como complemento nos componentes curriculares de Mecânica dos Fluidos, pois acreditamos ser uma ótima aliada na melhoria do desempenho dos estudantes quanto à compreensão e à aplicação dos conceitos apresentados.